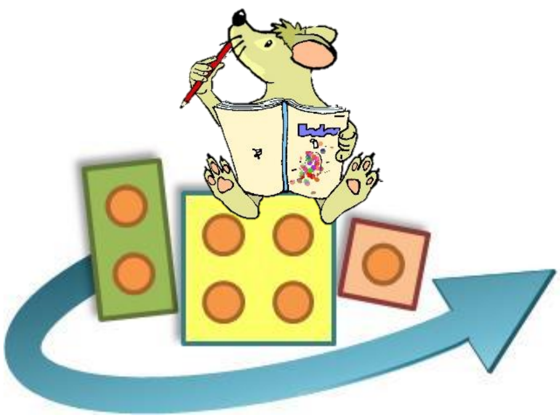
Isolde Jäger

Rechnen durch gedachte Anschauungen

Paradigmenwechsel in der Rechenförderung

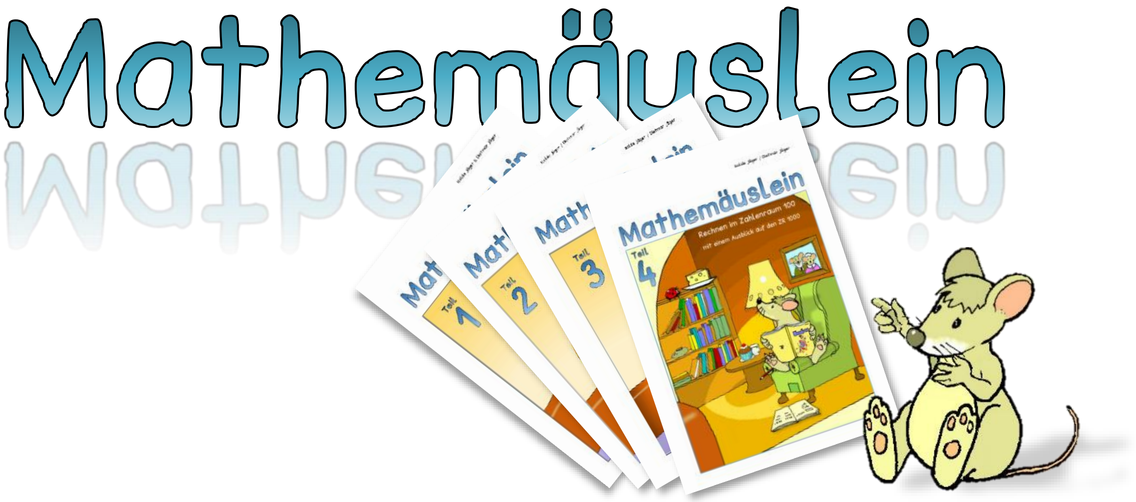
Aus der Praxis für die Praxis



Version 14 – November 2024

Anschrift der Autoren: Isolde Jäger
Dietmar Jäger
Herrenriedstraße 4
6845 Hohenems
Tel.: 05576 / 78383
www.merkmal.info

Die Schulbücher für den Lehrstoff der 1. und 2. Schulstufe nach dem Österreichischem Lehrplan der Volksschule (auch für Sonderschulen zu empfehlen):



Heft 1: Mengenbilder und Zahlen bis 10

(verwendbar auch in der Vorschulklasse oder im letzten Kindergartenjahr)

Heft 2: Rechnen im Zahlenraum 10

Heft 3: Zehnerüber- und Zehnerunterschreitung im ZR 19

Für die 2. Klasse (oder für schnelle Kinder der 1. Klasse):

Heft 4: Rechnen im Zahlenraum 100 mit einem Ausblick auf den ZR 1000
Malreihen, In-Sätzchen, Größen, Sachaufgaben

Erklärung der Querverweise auf die Arbeitsblättersammlung: AB 0.1 ff

AB	...	Arbeitsblatt
1.2	...	die erste Zahl bezieht sich auf das Modul und die zweite Zahl stellt eine laufende Nummerierung des Themas dar
ff	...	diesem Arbeitsblatt folgen in der Arbeitsblättersammlung noch weitere thematisch passende Seiten

Paradigmenwechsel gefällig? – Sichtweisen aus der Praxis

Rechnen

Rechnen wird im herkömmlichen und landläufigen Sinn als das Lösen von mathematisch notierten Fragestellungen in der Form von 3 + 2 = ? gesehen. Unter dem Eindruck der Schwierigkeiten, die das Erlernen dieser Kunst den Kindern bereitet, wird Mathematik gerne als eine „Fremdsprache" bezeichnet, mit der das Kind in der Schule konfrontiert wird.

Dem wird hier dagegengehalten, dass den Kinder in der Schule nur die Namen der Schriftzeichen dieser „Fremdsprache" begegnen und dass sie von den Begriffsinhalten dieser Sprache, von der Sprache selber, meist viel zu wenig vermittelt bekommen. Begriffe ohne Inhalt sind unbrauchbare Worthülsen.
Ein Paradigmenwechsel würde hier bedeuten, Rechnen, d. h. Rechenoperationen als (gesetzmäßigen) *Umgang mit Mengen* zu sehen. Aus dem Umgang mit Mengen wird allmählich ein verinnerlichter Umgang mit verinnerlichten Mengen*bildern* abgeleitet. Und erst zur Unterstützung dieses Denkens wird, quasi als Nebenprodukt, die mathematische Notation der Gedanken eingeführt. Es soll also nicht mehr die Notation 3+2=5 im Zentrum des Anfang-Mathematikunterrichtes stehen, sondern das mathematische Denken schlechthin. Das Denken geschieht anhand von Begriffen, die verinnerlichte Anschauungen sind. Sehr schön hat Immanuel Kant in seinem Werk „Kritik der reinen Vernunft" den Weg von der Sinneswahrnehmung zum Begriff zusammengefasst: „Vermittelst der Sinnlichkeit also werden uns Gegenstände gegeben, und sie allein liefern die Anschauungen; durch den Verstand aber werden sie gedacht, und von ihm entspringen Begriffe."

Bildung des Zahlbegriffs

Den Kindern wird zugemutet, von einigen wenigen Mengendarstellungen mit allen möglichen Dingen in allen möglichen Anordnungen einen hochabstrakten, auf eine Ziffer reduzierten Zahlbegriff abzuleiten.

Durch den Wechsel, die Inkonstanz, der Art der Mengenelemente und der Elementanordnung kann aber nur sehr schwer ein Zahlenbegriff abgeleitet werden. Die Folge daraus ist, dass die Zahl eine Zählung der Mengenelemente bleibt – und somit auch das zählende Rechnen persistiert.
Der Umgang mit Anschauungsmaterial wird im herkömmlichen Mathematikunterricht sehr oft der reinen Notation untergeordnet und ist meist nur eine alibihafte Illustration einer ziffernnotierten Aufgabe – sinngemäß: „Wenn du die Rechnung nicht kannst, dann hol dir halt das Legematerial." Das reicht nicht aus, um genügend *„Anschauungen"* zu erhalten, damit mit ihnen *„gedacht"* werden kann.
Ein Umdenken würde hier bedeuten, dem Prozess der Abstraktion einen sehr breiten Raum zu geben. Durch konstante (merkmalreduzierte) Mengenelemente und die konstante Anordnung der Elemente wird die *Abstraktion vor den Augen der Kinder* eingeleitet. Diese konstante Mengendarstellung bildet die erste Stufe auf dem Weg der Abstraktion zu einer gedanklichen Mengen-Zahl-Vorstellung, denn die so gebotenen Anschauungen können 1:1 verinnerlicht werden. Diese Anschauungen bilden klare, gut vorstellbare empirisch Begriffe, mit denen alle

grundlegenden mathematischen Operationen gedacht werden können – besonders auch von Kindern mit Lernschwierigkeiten in Mathematik, wie die Praxis bereits eindrücklich gezeigt hat. Positive Erfahrungen mit Kindern in verschiedenen Settings, bei denen die sinnliche Wahrnehmung und das Entwickeln einer innerlichen Anschauung im Zentrum standen, sind geeignet, die Diskussion um die Berechtigung des Begriffs „Dyskalkulie“ weiter anzufachen.

Tragfähigkeit eines Begriffs für das mathematische Verständnis

Abstraktion dient in der (höher entwickelten) Tierwelt dem Wiedererkennen wichtiger Umweltfaktoren (z. B. der Haarhaufen da draußen auf der Straße ist auch wie ich ein Hund). Wir Menschen sind aber offensichtlich, da wir nur Mengen mit 4 (mit Übung bis 5) Elementen simultan erfassen können, nicht großartig darauf angelegt, die Anzahl von Mengenelementen zu erkennen. Größere Mengen als Vier müssen wir entweder rasch in von uns erfassbaren Mengengrößen durchstrukturieren oder abzählen. Die Folge davon ist eine vage Vorstellung von Mengen größer als 4(5) und somit eine Erschwernis für den inneren Vollzug mathematischer Operationen.
Ein Umdenken würde hier bedeuten, neben der Mengeneigenschaft (z.B.) „sieben“ besonders auch den Begriff „*der* Siebener“ einzuführen. Damit meinen wir, durch konstante und fassbare Mengenbilder Rechenoperationen innerlich für Kinder leichter vorstellbar zu machen. Dies ist hilfreich z.B. beim Erlernen der Malreihen. Das Kind kann sich den materiellen Hintergrund zu den Malreihen besser vorstellen (z.B. „Viermal einen Siebener“) und ist weniger darauf angewiesen, sein mathematisches Verständnis und Können auf das gedichtartige Auswendiglernen von Malsätzen zu gründen.

Automatismen, Auswendiglernen und andere Rechentricks

In einem bestimmten normierten und standardisierten Test, der in der Pädagogik und Psychologie zur Feststellung der Rechenkompetenz Anwendung findet, wird das spontane Abrufen des Rechenergebnisses als gute Leistung bewertet.

Hier würde sich die Frage stellen, ob spontanes Abrufen berechtigterweise als Ausdruck einer guten Rechenkompetenz betrachtet werden kann, denn es ist auch vorstellbar, dass z.B. der Rechensatz 80 + 80 = 160, ohne mathematischem Sinn dahinter, auswendig gelernt wurde. Ohne Verständnis der Mengenverhältnisse können auch die „Zehnerfreunde“ auswendig gelernt und abgerufen werden. Schöne Päckchen, Verdoppelungen und Analogieaufgaben in den Rechenbüchern bergen die Gefahr, dass dadurch lediglich „Tricks“ einer noch nicht erreichten Abstraktionsebene angehäuft werden, mit deren Hilfe zwar richtige Zahlen bei Aufgabenstellungen ermittelt werden können, ohne jedoch über ein mathematisch-anschauliches Verständnis verfügen zu müssen. „Rechentricks“, als Problemlösung angeboten, sind Indikatoren dafür, dass das verstehende Rechnen nicht vermittelt werden konnte (man denke kritisch und gründlich darüber nach). Im Prinzip heißt das, die Leiden des zählenden Rechnens länger zu vertuschen. Ein Paradigmenwechsel würde hier bedeuten, dass Kinder als erstes eine verstehende innere Anschauung über die Ebene des konkreten Handelns erwerben müssen. Man lässt sie dabei, wie in den Naturwissenschaften üblich, den induktiven Weg gehen. Sie entwickeln selber Hypothesen über Gesetzmäßigkeiten. (Vorgegebene Analogieaufgaben repräsentieren den deduktiven Weg, wo nach Vorgabe der Gesetzmäßigkeit ihre Anwendung eingeübt werden soll.) Wenn sie die verstehende Vorstellung erlangt haben, können Verdoppelungen und schöne Päckchen nichts mehr zum Erwerb einer Mathematikkompetenz beitragen.

Mengen-Darstellungsform und Hilfsstruktur

Traditionell (und aktuell verstärkt) wird auf der Menge Fünf als Hilfsstruktur beim Erfassen von Mengen sowie beim Rechnen Lernen aufgebaut. Dies scheint naheliegend zu sein, da unser Zahlensystem ein dekadisches System ist und wir an unseren Händen je fünf Finger haben. Auch unter dem Aspekt der „Ganzkörperlichkeit" werden die Finger als Anschauung und Bündelung als natürliches Muss gesehen.

Es besteht jedoch kein Grund, weshalb zwischen der Pentadactylie (fünfstrahlige Extremitäten) der Wirbeltiere und der Wahrnehmung von Mengen ein Zusammenhang zu suchen wäre.
Ein Paradigmenwechsel würde hier bedeuten, vielmehr in der *Symmetrie* ein wichtiges Signal für unsere Mengen-Wahrnehmung zu erkennen. Die Symmetrie eines Gesichtes, mit den Augen als entscheidende Marker, dient nicht nur beim Menschen als wichtiges, oft lebenswichtiges Merkmal beim visuellen Isolieren eines Artgenossen oder Fressfeindes aus der unsymmetrisch strukturieren Umwelt. Wir sind darauf konditioniert, auf symmetrisch angeordnete Augenpaare bzw. auf vertikale Symmetrieachsen mit besonderer Aufmerksamkeit zu reagieren. Menschliche Babys und die meisten Wirbeltiere blicken uns bei Kontaktaufnahme stets in die Augen. Daher wird hier diese in der Natur liegende Eigenschaft als besonders geeignet erachtet, Mengenvorstellungen auf der Basis der Menge *Vier* als Grundstruktur zu entwickeln, besonders auch im Fall von Kindern mit Lernschwierigkeiten. Denn die Menge Vier kann von den meisten Menschen sicher simultan erfasst werden (was bei der Menge Fünf nicht der Fall ist) und sie hat in der Würfelanordnung jene wichtige vertikale Symmetrieachse, auf die wir Wirbeltiere besonders achten (was auf die Finger ebenfalls nicht zutrifft). Zudem ist sie geeignet, aus ihr alle Mengen im ZR 10 (und weit darüber hinaus) direkt abzuleiten, so dass ein leicht überschaubares und leicht zu verinnerlichendes Anschauungssystem gegeben ist.

Weg-Ziel-Bewusstheit beim Kind

Ein Umdenken würde hier bedeuten, beim Kind vom „vagen (fehlenden) Wissen-wozu" hin zum Wecken der „*Weg-Ziel-Bewusstheit*" überzugehen. Es soll nicht mehr erwartet werden, dass das Kind brav seine Rechenblöcke abarbeitet ohne zu wissen warum. Vielmehr soll dem Kind ein *erstrebenswertes* Ziel und ein klarer, *bewältigbarer* Weg zum Ziel vorgestellt und mit ihm besprochen werden – Transparenz für die Kinder.
Kindern muss stets klar sein, dass sie sich aktuell mit einem essentiellen Teilschritt auf dem Weg zum Ziel beschäftigen, den sie ihrer Erfahrung gemäß auch schaffen werden. Ähnlich motivieren auch Computerspiele. Dabei wird der innere Antrieb entfesselt, den wir alle haben, wenn wir etwas erreichen *wollen*.
Dazu müssen die Teilschritte auf dem Weg zum Ziel stets leicht sein. Die Kinder dürfen nie darüber zweifeln, ob sie diesen Teilschritt schaffen können oder nicht. Wenn sich ein Kind der ersten Klasse in Anbetracht seiner Leistung bereits selber Dummkopf nennt, dann ist viel Grundsätzliches schief gelaufen.

Finden der Rechenstrategie

Kinder denken nicht immer so, wie es Erwachsene im Elfenbeinturm gerne hätten. Dass jeder seine eigenen Rechenstrategien entwickeln soll, mag den Erwachsenen vor dem Hintergrund der aktuell gültigen gesellschaftlichen Paradigmen begeistern. Aber, um ein anderes bei Erwachsenen für gültig erachtetes Paradigma aus der Biologie zu verwenden, es ergeben sich nach dem Prinzip des „Survival Of The Fittest" regelmäßig einige Verlierer, die u. a. im sonderpädagogischen Förderbedarf enden.

Ein Umdenken würde hier bedeuten, dem (noch) aktuellen Mainstream in der Mathematik-Didaktik, jedes Kind seine Rechenstrategie selber finden zu lassen, zu widersprechen. Einfache und effektive Rechenstrategien haarklein zu vermitteln hilft dem lernschwachen Kind und bietet dem überdurchschnittlich begabten Kind eine Möglichkeit, sein eigenes Denken um eine Facette zu erweitern.

Hefteinträge und deren Korrektur

Ein Umdenken würde hier bedeuten, Hefteinträge durch das Kind im Fach Mathematik auf ein Mindestmaß zu reduzieren. Rechnungen in ein Heft zu übertragen erfordert kostbare Zeit, die zu schade für Schreibübungen ist. (Zu erlernen, wie übersichtliche und hilfreiche Notizen für Rechenaufgaben gemacht werden, genügt im Zusammenhang mit Aufgaben der angewandten Mathematik.) Die jeweils aktuellen Rechenaufgaben fallen dem Kind nach der hier vorgestellten Methode leicht. Allfällige Fehler, die dabei entstehen können, sind Flüchtigkeitsfehler – kaum wert, sie penibel zu ermitteln. Dadurch werden kostbare Ressourcen (Reduktion der Korrekturarbeit) der Lehrperson gespart, die auf sinnvollere Weise für die Kinder eingesetzt werden können.

Schriftliche Unterrichtsvorbereitung

Schön und detailliert ausgeführte schriftliche Tages-, Wochen- und Jahresvorbereitungen und Förderpläne gelten allgemein als wichtige Voraussetzungen professionellen Unterrichts.

Ein Umdenken würde hier bedeuten, dieser Sichtweise weitgehend zu widersprechen, denn die vorliegende Lernmethode vermittelt eine lückenlose Gesamtsicht auf die kleinsten Teilschritte des Rechnen Lernens. Diese im Gedächtnis, ist die Lehrperson mit den stets bereitliegenden Arbeitsmitteln in der Lage, jedem Kind zu jeder Zeit spezifisch weiterzuhelfen. Die altbekannten schriftlichen Vorbereitungen werden dadurch überflüssig, ja, geradezu hinderlich.

In der herkömmlichen Rechenförderung steht das Bemühen um das Kind mit Rechenschwäche im Mittelpunkt. Dadurch, dass bei richtiger und konsequenter Anwendung der hier vorgeschlagenen Methode auch Kinder mit Rechenschwäche weniger zurückbleiben würden, könnten vermehrt Kinder mit Rechen*stärken* in den Focus der Unterrichtsplanung gerückt werden. Auch das wäre ein Paradigmenwechsel.

Der im Folgenden dargelegte Weg zum verinnerlichten, nicht zählenden Rechnen wurde ausgehend von Eindrücken der Methode nach Maria Summer und der Mengendarstellung nach

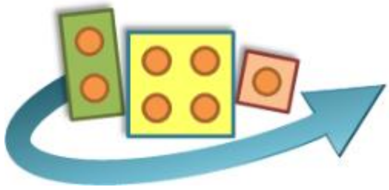
Wilhelm August Lay und **H. Born** [1] im Umgang mit integrativ unterrichteten Kindern mit besonderem Förderbedarf in den Jahren 1998 bis 2016 entwickelt.

Übersicht, Inhalt

---

[1] **Wilhelm August Lay** (1898): Führer durch den ersten Rechenunterricht. Naturgemäßes Lehrverfahren gegründet auf psychologische Versuche und angeschlossen an die Entwicklungsgeschichte des Rechenunterrichts. Karlsruhe: Nemnich, Karlsruhe. Die 3. Aufl. 1914 erschien unter dem Titel: Der Rechenunterricht auf experimentell-päd. Grundlage.
Lay modifizierte die Bornschen Zahlenbilder (**H. Born**, 1867) indem er sie in quadratische Vierergruppen untergliederte (**Maria Summer** orientierte sich an Lays Mengendarstellungsweise). Der bekanntere und einflussreichere „Reformpädagoge" **Johannes Kühnelt** übernahm in seinem Werk „Neubau des Rechenunterrichts" (1916) ebenfalls die Bornschen Zahlenbilder.

1 Grundsätze zur Erlangung verinnerlichter Anschauungen



Jede Menge bis zu einer Mächtigkeit von 10 soll ...

- **a)** als Bild aus drei Grundbildern erarbeitet,
- **b)** durch häufigen Umgang *verinnerlicht*
- **c)** mit dem entsprechenden Zahlbegriff verknüpft werden.

Die Mengen- bzw. Zahlenbilder sollen keinesfalls linear (Zahlenstrahl) angeordnet sein, da solche von rechenschwachen Kindern nur sehr schwer ganzheitlich erfasst und verinnerlicht werden können. Ein Zahlenstrahl wird nicht als Menge wahrgenommen, sondern als Reihe, die natürlicherweise abgezählt wird. Dagegen fußt die vorliegende Arbeitsmappe auf der *bilinearen* Mengendarstellung nach WILHELM A. LAY und H. Diese Art der Darstellung erleichtert Kindern, Mengenvorstellungen zu entwickeln.

Die Reihenfolge der Mengenbilder beginnt mit der leicht erkennbaren Anordnung der Menge 4 und setzt sich fort über die geradzahligen Mengen (4 - 2 - 8 - 6 - 10) und erst im Anschluss daran über die ungeradzahligen Mengen (3 - 5 - 7 - 9). Besonders bei Kindern mit deutlichen kognitiven Schwächen empfiehlt sich eine strikte Einhaltung dieser Reihenfolge. Die Kinder werden stets nachdrücklich darauf hingewiesen, dass sie möglichst in allen Bildern die *4er-Anordnung* erkennen sollten (Abb. 1).

Alle Mengenbilder setzen sich nur aus den Bildern 4, 2 und 1 zusammen.

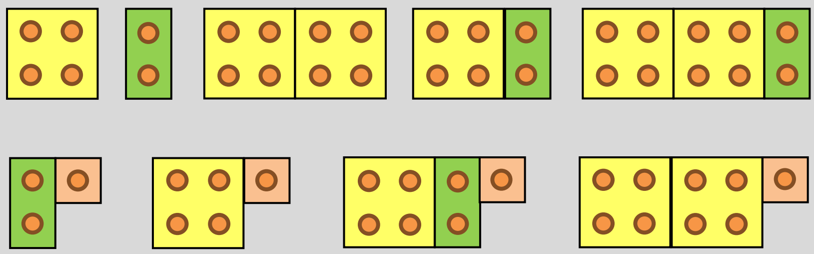
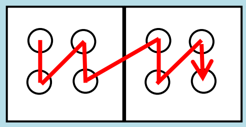


Abb. 1: Mengendarstellung bis zur Mächtigkeit 10.

Wenn Elemente eingeordnet, angetippt oder ausgemalt werden, soll stets die unten angeführte **Reihenfolge** eingehalten werden:



Wesentlicher Vorteil dieser bildlichen Darstellung ist, dass die so dargestellten Mengen bei der Mengenzerlegung (Modul 2) wiederum in genau diese Bilder zerlegt werden können.
Ein weiterer Vorteil ist die Erweiterbarkeit auf größere Zahlenräume (ZR 100, ZR 1000 und größer – siehe dazu Seite).

2 Ist-Standerhebung

Die Ist-Standerhebung ist nur nötig, wenn das Kind bereits einige Zeit den Mathematikunterricht in der Schule besucht hat, jedoch dem Unterricht nicht mehr folgen kann und eine spezifische Förderung braucht. Dabei wird als erstes anhand des „Zahlenzerlegeblattes“ (in der Arbeitsblättersammlung) die Mengengröße ermittelt, die sich das Kind noch vorstellen kann und mit der es operieren kann. Die Rechenförderung soll dann auf dem festgestellten Niveau begonnen werden. AB 0.1

Hinweise darauf, ab welcher Menge keine verinnerlichte Vorstellung mehr besteht, stellen leichte Verzögerungen bei Antworten dar. Es ist dabei sehr wichtig, genau zu beobachten, um eventuell innerliches Zählen zu erkennen. Hinweise auf zählendes Rechnen liefern z. B. leichte Fingerbewegungen, das Verstecken der Hände oder ein starr ausgerichteter Blick.

Die Kinder werden darüber aufgeklärt, dass die Methode des zählenden Rechnens viele Nachteile hat (viel Zeit und Konzentration erfordernd, fehleranfällig, ...) und dass sie nun eine nicht zählende Rechenstrategie lernen werden.

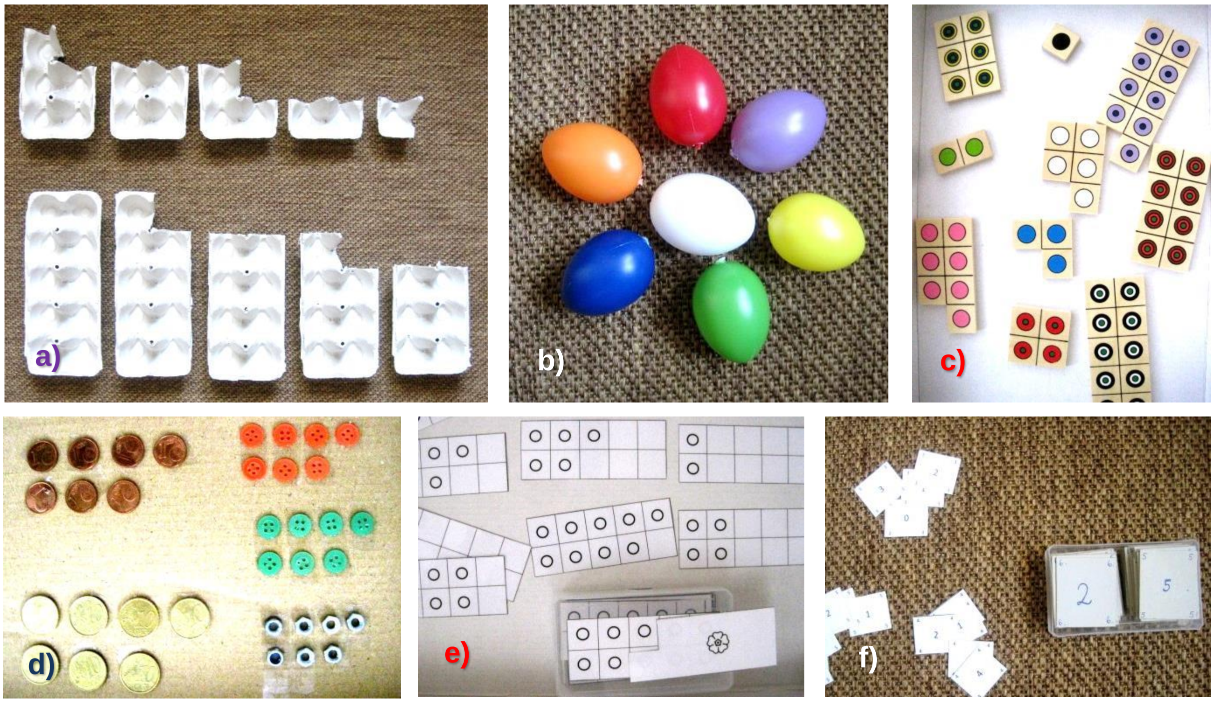
3 Vorbereitungs- und Arbeitshinweise

Differenzierung

Die vorliegende Rechenlernmethode gestattet Kindern derselben Gruppe ihre Leistungspotenziale in ihrem individuellen Lerntempo zu entfalten. Die Module dieser Rechenförderung oder Teile davon sind so gestaltet, dass sie nach einer Einführung durch die Lehrperson selbständig und eigenverantwortlich von den Kindern abgearbeitet werden können. Die Aufgabe der Lehrperson ist dabei, auf das Lernkontinuum bei jedem einzelnen Schüler zu achten. Diese Achtsamkeit bedingt das rechtzeitige Bereitstellen von Unterrichtsmaterialien, das Erkennen von Fehlentwicklungen, das Schaffen eines guten Lernklimas, Hilfestellungen oder die Organisation von Hilfestellungen (Mitschüler, Eltern) usw.
Zwar ist die hier vorgestellte Methode eine Schritt-für-Schritt-Anleitung, die in ihren Teilschritten eingehalten werden sollte, die aber von den Kindern ihren Begabungen entsprechend unterschiedlich schnell abgehandelt werden kann, bzw. dabei auch Teilschritte übersprungen werden können.

Unterrichtsmittel

Die Basisausstattung für den Unterricht erfordert folgende Unterrichtsmittel:



a) mindestens 10 Sets zugeschnittener Eierschachteln; b) verschiedenfarbige Kunststoffeier oder Tischtennisbälle; c) Holzlegeplättchen aus der „Zahlenbox“ von Merlin, Didakt GmbH, https://www.j-wo.at/portfolio/zahlenbox ; d) verschiedenes Legematerial; e, f) Legematerial zum Ausdrucken;

Schulbücher werden in der Phase des Rechnen Lernens nicht gebraucht. Für die dritte Klasse der Grundschule können wieder Rechenbücher angeschafft werden, oder – weil sie nur teilweise gebraucht werden können – die Individualisierung wird weitergeführt.

Arbeitsblätter

Ein Basis-Set an Arbeitsblättern (und Legeplättchen) wird diesem Konzept beigelegt. Sie dienen als Anregung, modifizierte oder erweiterte Versionen zu erstellen. In der Praxis hat sich das Laminieren der Arbeitsblätter und die Verwendung von non-permanenten Folienstiften beim Schreiben auf die Blätter bewährt, denn das Geschriebene kann wieder unter dem Wasserhahn abgespült werden. Auf diese Weise kann viel Papier gespart werden. Beim Laminieren ist darauf zu achten, dass die Folien rundherum wasserdicht verschweißt sind und anschließend nicht mehr gelocht werden.

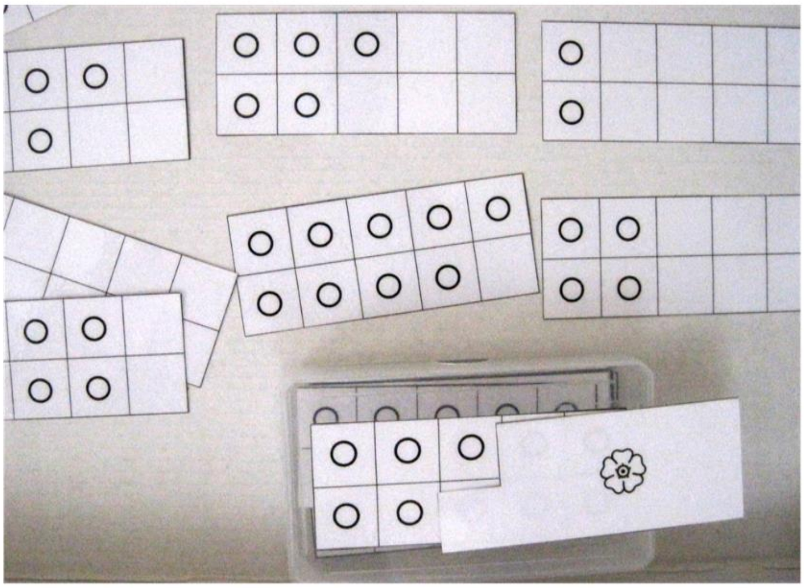
4 Ablauf der Rechenförderung

Modul 1

Erwerb der Mengen-Zahl-Vorstellung

Ziel:

Erkennen und Reproduzieren der Mengenbilder 1-10



<u>Modul 1</u>: Erwerb der Mengen-Zahl-Vorstellung

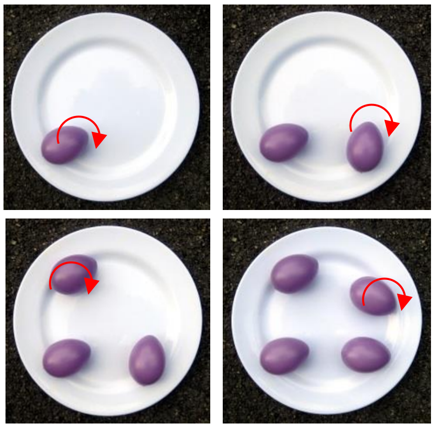
Für den Erfolg des Mathematikunterrichtes ist die zuverlässige, erkennbare Verinnerlichung und Anwendung der Inhalte dieses Moduls von entscheidender Bedeutung! Erst nach Erreichen dieser Lernziele kann mit dem nächsten Modul „Zerlegen von Mengen in Teilmengen“ begonnen werden! Die hier erlernten Mengenbilder sind universal verwendbar, denn auch die Teilmengen entsprechen diesen Bildern, ebenso der Aufbau der größeren Zahlenräume und die Darstellung der Malreihen.
Ziffern bzw. Zahlen werden parallel zur Mengendarstellung erarbeitet und dienen nur der verkürzten schriftlichen Benennung von Mengen. Das Ziel dieses Moduls kann von manchen Kindern in kurzer Zeit erreicht werden, andere wiederum brauchen etliche Wochen bis sie so weit sind. Wichtig ist das Ermöglichen einer zeitlichen Individualisierung des Lernfortschritts.

Es dürfen aus Gründen der Hygiene keine Eierkartons verwendet werden, die bereits Kontakt mit echten Eiern hatten.

Teil 1: Geradzahlige Mengen

a) Erarbeiten der Mengenbilder

Die 4er-Anordnung wird besonders herausgehoben (Königszahl).

Menge von **4** Elementen	Handlung	Sprüche und Abbildungen
Ziel: Einführen und erarbeiten der Menge 4 **Material:** • 1 großer flacher Teller • viele Kunststoffeier • 4er-Eierkartons	In den großen flachen Teller werden nach und nach 4 Eier (oder Tischtennisbälle) gelegt und durch Drehen in kreiselnder Bewegung gehalten. Nachdem das vierte Ei kommentarlos in den Teller gelegt wurde, wird der Teller abgestellt und von allen still betrachtet. Diese „Erstbegegnung“ mit der Menge Vier wurde in ähnlicher Art stets von MARIA SUMMER praktiziert. Man kann sich darauf verlassen, dass nach einiger Zeit ein Kind das Wort *„vier“* erwähnen wird – bei Bedarf kann dies durch eine Frage wie *„Was ist das?“* evoziert werden. Nun wird gefragt: *„Wisst ihr, wo sich die Eier befinden, wenn wir sie kaufen? Auch auf einem Teller?“* Die zu erwartende Antwort wird etwa lauten: *„Nein, in einer Schachtel.“* Diese Alltagserfahrung wird umgesetzt: *„Gut, dann füllen wir jetzt ganz viele 4er-Schachteln. Nehmt mit <u>jeder Hand immer 2 Eier</u> aus der Kiste.“* Im Raum stehen letzten Endes viele gefüllte Vierer-Eierkartons herum. Diese Vierdarstellungen sollen multisensorisch[1] wahrgenommen und verinnerlicht werden. Beispielsweise springen die Kinder über jeden Eierkarton, grenzen ihn mit beiden Händen ab, benennen ihn mit „Vier“, schließen die Augen und ertasten die vier Eier im Karton, tippen mit dem Finger auf jedes einzelne Ei (genau 4x tippen) oder klopfen mit einem Stäbchen auf die vier Eier bzw. hören einem anderen Kind dabei zu (genau 4x klopfen) usw. – **aber dabei niemals zählen!!!** Die Mengen sollen ***nicht durch zählen*** erfasst werden. Die besondere Menge 4 wird zur Vertiefung auch mit **anderen Gegenständen** auf verschiedene Weise dargestellt, z.B. auf quadratischen Servietten usw.	  

Beachte auch „Arbeitsvorschläge 1“
Download auf www.merkmal.info

1 Berücksichtigung des visuellen, auditiven, haptischen oder kinästhetischen Lerntyps!

Einschub: Weitere Reime zu den Mengenbildern in Liedform

Melodievorschlag:

4	Vier, vier, vier, die liegen hier, und die bringe ich jetzt dir.
2	Die Schere schneidet vier entzwei, jetzt sind es nur noch zwei und zwei.
	Zwei sind da, und zwei sind hier. Zusammen sind es wieder vier.
8	Diese vier hast du gebracht. Vier dazu, dann sind es acht.
	Nimmst du vier weit weg von hier, bleiben übrig wieder vier.
6	Da sind vier, zwei bringt die Hex'! Sieh' nur her, jetzt sind's sechs!
	Zwei, die schenk' ich gerne dir. Für mich bleiben dann noch vier.
10	Vier, vier, zwei, die kann man dreh'n und es bleiben trotzdem zehn.
	Unser Max holt zwei und lacht. Egal, es bleiben ja noch acht.
10	Merk' dir, acht und zwei sind zehn. Das kann doch ein jeder seh'n.
	Gebe ich die acht dem Hai, dann bleiben übrig nur noch zwei.

Diese Reime können bei Bedarf ergänzend für die Erarbeitung der Mengenbilder eingesetzt werden. Empfehlenswert ist, anfangs nur die „hinführenden" Reime (dunklere Kästchen) zu verwenden und später eventuell auch die „rückführenden".

3	Ein Ei bring die Maus herbei, schaut nur her, jetzt sind es drei.
	Holt der schlaue Fuchs ein Ei, dann sind es leider nur noch zwei.
5	Ein Ei war in Oma's Strümpf'. Schau nur her, jetzt sind es fünf!
	Geb' ich eins vom Fünfer dir, kannst du seh'n, es sind noch vier.
7	Ein Ei muss das Huhn herschieben, juppidu, jetzt sind es sieben!
	Holt dann eins die freche Hex', hui, dann sind es wieder sechs.
9	Leg' zu acht noch eins dazu, dann sind's neun, und ich geb' Ruh'!
	Das Huhn hat eins kaputt gemacht, darum liegen hier nur acht.

Menge von 2 Elementen	Handlung	Sprüche und Abbildungen
Ziel: Mengenbild 2 erarbeiten **Material:** • viele Kunststoffeier • 4er-Eierkartons • geteilte 4er-Eierkartons (2er-Einheiten)	Die 2er-Menge entsteht durch Auseinanderschneiden eines 4er-Eierkartons. Nachdem dies ausreichend eindrücklich erlebbar gemacht wurde, werden die schon vorhandenen vollen 4er-Eierkartons in die bereitgestellten 2er-Kartons umgefüllt. Es nehmen immer zwei Kinder ab-	„Die Schere schneidet vier entzwei, jetzt sind es nur noch zwei und zwei.“

wechselnd beginnend je 2 Eier heraus, sprechen *„So teilen wir die Vier: zwei gehören mir, und zwei gehören dir“* und legen sie in die 2er-Eierkartons.

Nachdem dies oft wiederholt wurde, wird der umgekehrte Weg durchgespielt: *„Zwei von mir und zwei von dir sind zusammen wieder vier.“* Dabei werden die 2er-Kartons zusammengeschoben, so dass wieder eine 4er-Anordnung entsteht.

Natürlich wird auch hier eine multisensorische Wahrnehmung der Mengendarstellungen angestrebt um die Mengenbilder Zwei und Vier und ihre Beziehung zueinander zu verinnerlichen. Beispielsweise sind im Raum 2er- und 4er-Schachteln verteilt und auf den Zuruf *„zwei“* oder *„vier“* springen die Kinder in die Grätsche über der genannten Menge usw.

Menge von 8 Elementen	Handlung	Sprüche und Abbildungen
Ziel: Mengenbild 8 erarbeiten **Material:** • viele Kunststoffeier • 4er-Eierkartons	Nachdem wieder 4er-Kartons befüllt wurden, stellen zwei Kinder je einen 4er-Karton nebeneinander und sprechen dazu: *„Ich habe vier, und vier hast du gebracht,* *zusammen sind es acht.“*	„Ich habe vier, und vier hast du gebracht, zusammen sind es acht.“

Es folgt wiederum, wie bereits bei der Menge mit 4 Elementen erwähnt, die Auseinandersetzung mit der Menge 8 über verschiedene Sinne, um das Mengenbild zu verinnerlichen.

Bei Bedarf kann zwischendurch zu **b)** *„Einüben und verinnerlichen der geradzahligen Mengenbilder“* auf Seite 16 gesprungen werden, um dann nach Abarbeiten der dortigen Schritte 1-4 wieder mit der Menge 6 auf Seite 14 weiterzumachen.

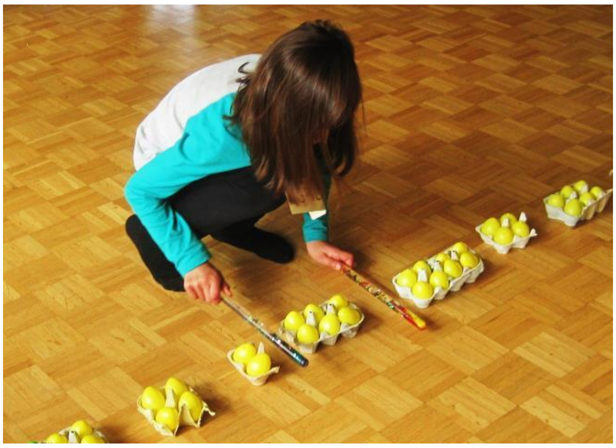
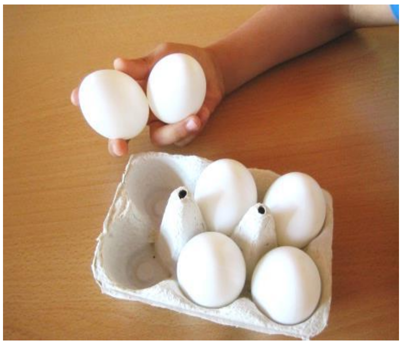
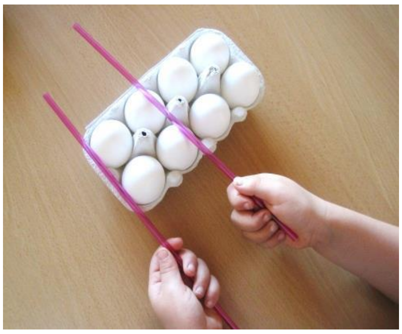
Beachte auch „Arbeitsvorschläge 1“, Download auf www.merkmal.info

Menge von **6** Elementen	Handlung	Sprüche und Abbildungen
Ziel: Mengenbild 6 erarbeiten **Material:** • viele Kunststoffeier • 4er-Eierkartons • 2er-Eierkartons 	Die Mutter will Kekse backen. Dazu braucht sie eine 4er- und eine 2er-Eierpackung. Diese bringen die Kinder und sprechen: *„Vier und zwei sind sechs, jetzt macht die Mama Keks.“*	„Da sind vier, zwei bringt die Hex‘! Sieh‘ nur her, jetzt sind’s sechs!“  

Menge von **10** Elementen	Handlung	Sprüche und Abbildungen
Ziel: Menge 10 erarbeiten **Material:** • viele Kunststoffeier • 10er-Eierkartons 	Zur Erarbeitung des 10ers werden viele gefüllte 4er-Eierkartons im Raum verteilt bereitgelegt. Die Kinder versuchen nun die 10er-Kartons mit den 4er-Kartons zu füllen, wobei der Platz für jeweils 2 Eier frei bleibt. Daraus ergibt sich die Einsicht, dass 8 und noch 2 Eier 10 ergeben. Nun werden alle 10er-Kartons mit 4-4-2 vollen Eierschachteln gefüllt. Dazu sprechen die Kinder: *„Vier, vier, zwei und du wirst seh‘n, zusammen sind es zehn.“*	„Vier, vier, zwei, die kann man dreh‘n und es bleiben trotzdem zehn.“  

Anschließend sollen alle erarbeiteten Mengenbilder anhand von weißen oder einfarbigen Eiern oder Bällen, also ohne farbliche Strukturierung, dargestellt und erkannt werden, denn die Farbe ist ein irrelevantes Merkmal einer Menge. Dies ist ein bedeutender Schritt zum ganzheitlichen Erfassen und Verinnerlichen von Mengenbildern größer als vier. Das Kind strukturiert anfangs z.B. eine 8er-Anordnung im Geiste in zwei Vierer. Ziel ist nun das spontane Erkennen des 8er-Bildes als eigene Einheit.

Eine kurze Geschichte soll den Bezug zur erlebbaren Welt herstellen:
„Die Hühner des Bauern haben viele Eier gelegt. Um sie auf dem Markt zu verkaufen, muss er sie in Eierschachteln legen."

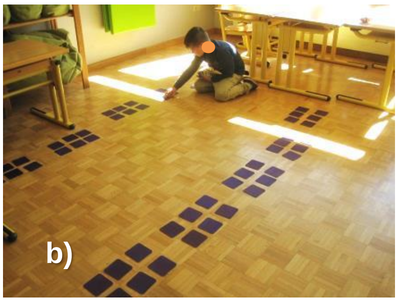
Unstrukturierte Mengen 2/4/6/8/10	**Handlung**	**Abbildungen**
Ziel: Spontanes Erkennen der geradzahligen Mengenbilder als eigene Einheiten **Material:** • weiße Kunststoffeier (oder Eier *einer* Farbe) • 2er-Eierkartons • 4er-Eierkartons • 6er-Eierkartons • 8er-Eierkartons • 10er-Eierkartons	Die 2er- und 4er-Mengen werden bereits simultan als Einheit erfasst. Das Einordnen von Eiern in die entsprechenden Kartons dient der Regelung der Handlung: Es sollen immer 2 weiße Eier in eine Hand genommen werden – also bei einer 2er-Schachtel mit einer Hand, bei einer 4er-Schachtel mit beiden Händen und bei den 6er-Kartons einmal beide Hände (4)und einmal mit einer Hand (2). Wenn alle 6er-Kartons voll sind, werden zwei Stäbe genommen und beidhändig die Menge Vier, die Menge zwei und abschließend die Menge Sechs eingegrenzt. Dazu wird gesprochen „*Vier – zwei – sechs*." In gleicher Weise wird mit den Mengen Acht und Zehn verfahren. Die Erarbeitungsphase abschließend werden von jeder Menge einige Eierschachteln auf ein Tisch gelegt und „abgefragt": „*Zeige 6*! *Zeige 10*!" oder „*Wie viele sind das*?" usw. Klugerweise sollte das „Abfragen" in unterschiedliche Spiele verpackt werden. Auch die Bildung von Folgen <2, 4, 6, 8, 10> (oder umgekehrt) kann geübt werden. Diese Phase ist abgeschlossen, sobald ein fließendes Beherrschen des Erkennens und Benennens der Mengen feststellbar ist. 	  

b) Einüben und verinnerlichen der geradzahligen Mengenbilder

Nach verschiedenen Übungen mit den Eierschachteln wird *Schritt für Schritt* in die bildliche Darstellung übergeleitet. Auf dieser Stufe soll ein *intensives* Auseinandersetzten mit den Mengenbildern unter verschiedenen Aspekten erfolgen (Basteln, Spielen, Bauen usw.).

Schritt 1: Gegenständliche Darstellung

Legen der Mengenbilder mit Spielplättchen nach Anweisungen, z.B. „*Lege lauter 6er!*" (Abb. a-c).

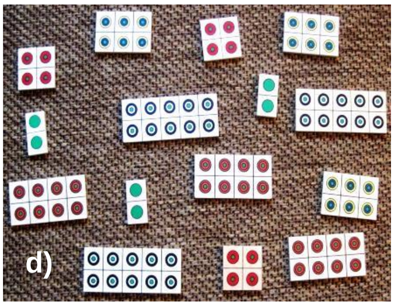


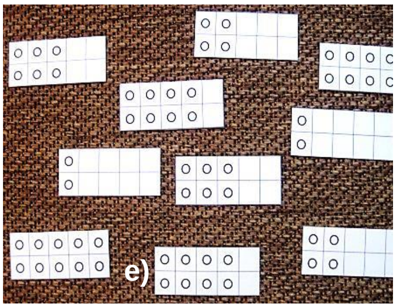
Schritt 2: Halbbildliche Darstellung

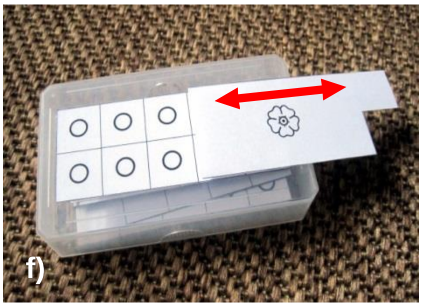
Legeplättchen der „Zahlenbox" (MERLIN, Didakt GmbH): „Suche alle 6er-Plättchen heraus und lege sie auf den Tisch." (Abb. d)

Schritt 3: Bildliche Darstellung

Legekärtchen ohne farbliche Markierung: „Suche alle 6er-Kärtchen." (Abb. e); Mengenbilder auf einem 10er-Kärtchen durch Abdecken mit einer Schablone darstellen (Abb. f).



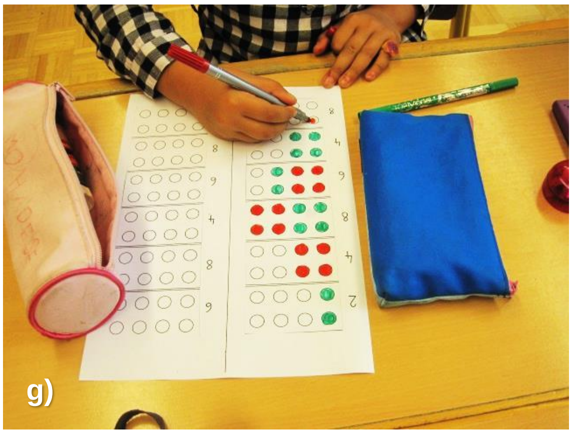


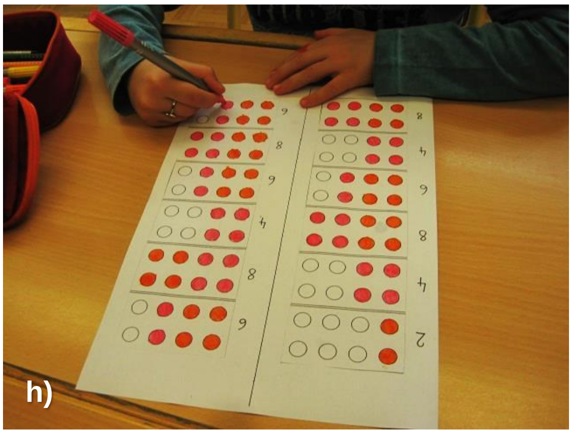


AB 1.1

Schritt 4: Grafische Darstellung auf einem Arbeitsblatt

Abstraktion auf das Niveau, auf dem mit Papier und Stift mit den Mengenbildern gearbeitet werden kann – das ist eine Vorbereitung für die begrifflich-abstrakte Ebene (Abb. g und h).



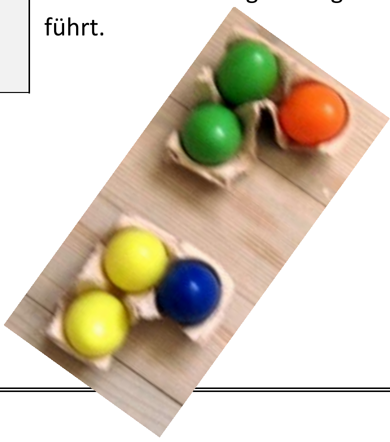
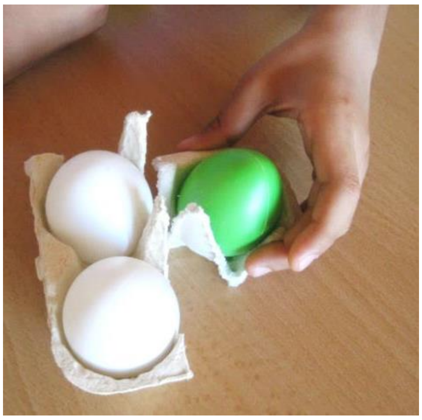


AB 1.2

Teil 2: Ungeradzahlige Mengen

a) Erarbeiten der Mengenbilder

Die ungeradzahligen Mengen werden von den geradzahligen Mengen abgeleitet:

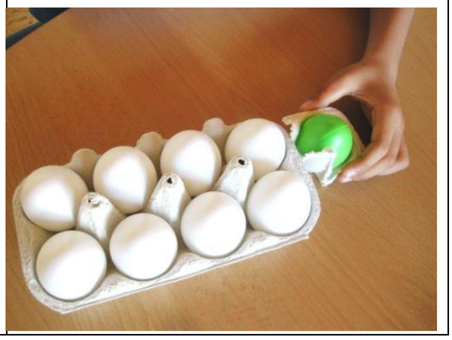
Menge von **3** Elementen	Handlung	Sprüche und Abbildungen
Ziel: Mengenbild 3 erarbeiten **Material:** • viele Kunststoffeier • 2er-Eierkartons • 1er-Eierkartons	Im 2er-Eierkarton sind 2 Eier. Mit dem Spruch „Schau hier hast du noch ein Ei und jetzt haben wir die Drei“ wird die Anordnung der Elemente der Menge 3 eingeführt. 	„Ein Ei bring die Maus herbei, schaut nur her, jetzt sind es drei.“ 

Menge von **5** Elementen	Handlung	Sprüche und Abbildungen
Ziel: Mengenbild 5 erarbeiten **Material:** • viele Kunststoffeier • 4er-Eierkartons • 1er-Eierkartons 	Im 4er-Eierkarton sind 4 Eier. Eines wird dazugelegt. Gesprochen wird: „Ein Ei war in Omas Strümpf‘, und jetzt haben wir die Fünf.“ 	„Ein Ei war in Omas Strümpf‘. Juhu, jetzt haben wir die Fünf.“

Bei Bedarf kann zwischendurch zu **b)** *„Einüben und verinnerlichen der ungeradzahligen Mengenbilder“* auf Seite 19 gesprungen werden, um dann nach Abarbeiten der dortigen Schritte 1-4 wieder mit der nächsten Menge auf Seite 18 weiterzumachen.

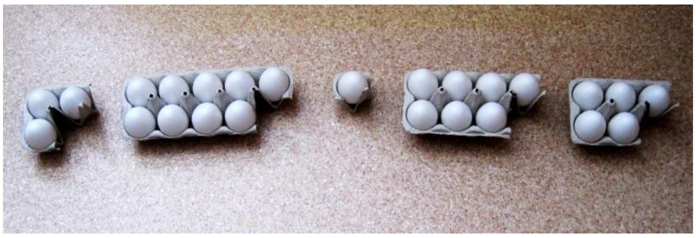
Beachte auch „Arbeitsvorschläge 1 und 3“, Download auf www.merkmal.info

Menge von 7 Elementen	Handlung	Sprüche und Abbildungen
Ziel: Mengenbild 7 erarbeiten **Material:** • viele Kunststoffeier • 6er-Eierkartons • 1er-Eierkartons	Im 6er-Eierkarton sind 6 Eier. Nachdem eines dazugelegt wurde, wird gesprochen: „Ein Ei muss das Huhn herschieben, schau, jetzt haben wir die Sieben.“ 	„Ein Ei muss das Huhn herschieben, juppidu, jetzt sind es sieben!“ 

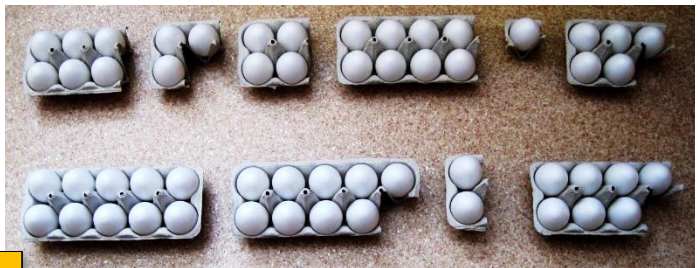
Menge von 9 Elementen	Handlung	Sprüche und Abbildungen
Ziel: Mengenbild 9 erarbeiten **Material:** • viele Kunststoffeier • 8er-Eierkartons • 1er-Eierkartons	Im Eierkarton sind 8 Eier. Gesprochen wird: „Leg‘ eins dazu, das würd‘ mich freun‘, dann sind es nämlich neun.“ 	„Leg‘ zu acht noch eins dazu, dann sind‘s neun, und ich geb‘ Ruh‘!“ 

Auch diese Phase schließt mit dem Loslösen von den farblichen Strukturen. Die Vorgangsweise kann in ähnlicher Weise erfolgen, wie bei den geradzahligen Mengen beschrieben wurde.

Es liegen Eierschachteln mit allen ungeradzahligen Mengen bereit (nebenstehende Abb.). Als Geläufigkeitsübung kann beispielsweise ein Kind dem anderen zurufen, welche Menge es zeigen soll usw.



Abschließend wird das Erkennen aller Mengen von 1 bis 10 spielerisch in mehreren Variationen bis zur ganz offensichtlich sicheren Verinnerlichung der Anschauungen geübt. Auch Folgen <1, 2, 3, …, 9, 10> (oder umgekehrt) können gebildet werden.



Beachte auch Arbeitsvorschläge **1** und **3**, Download auf www.merkmal.info

b) Einüben und verinnerlichen ungeradzahligen Mengenbilder

Nach dem Umgang mit den Eierschachteln wird auch hier allmählich in die bildliche Darstellung übergeleitet. Auf dieser Stufe soll ein *intensives* Auseinandersetzten mit den ungeradzahligen Mengenbildern erfolgen (Spielen, Bauen, Basteln, Transformieren in andere Mengenbilder usw.).

Schritt 1: Gegenständliche Darstellung

Mengenbilder mit Spielplättchen nach Anweisungen legen („*Lege lauter 7er!*“, Abb. a).

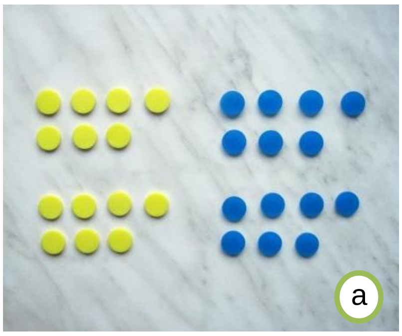
Schritt 2: Halbbildliche Darstellung

Legeplättchen der „Zahlenbox“ (Merlin, Didakt GmbH) benennen („*Suche alle 7er-Plättchen heraus und lege sie auf den Tisch.*“, Abb. b).

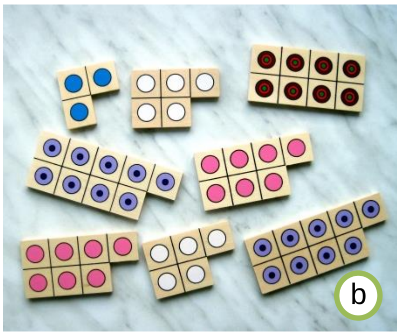
Schritt 3: Bildliche Darstellung auf Kärtchen

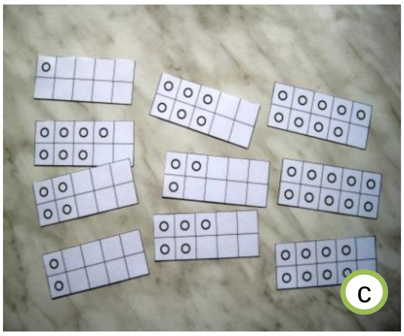
Kärtchen mit Mengenbildern im 10er-Raster („*Suche alle 7er*.“ Oder: „*Ordne der Reihe nach*.“, Abb. c).

Mengenbilder darstellen durch Abdecken mit einer Schablone auf einem 10er-Kärtchen (Abb. d).



AB 1.1

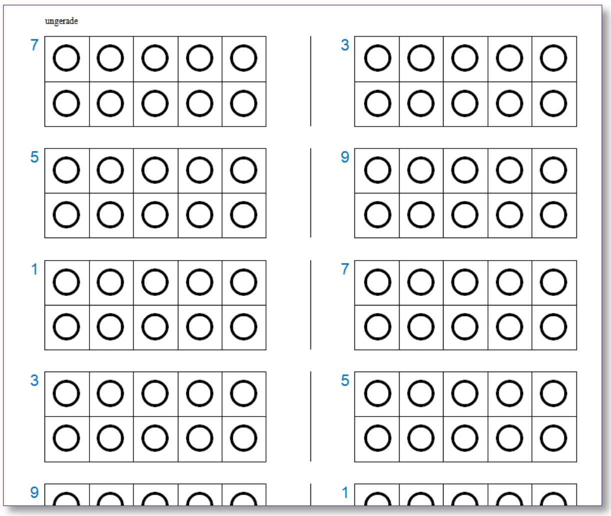


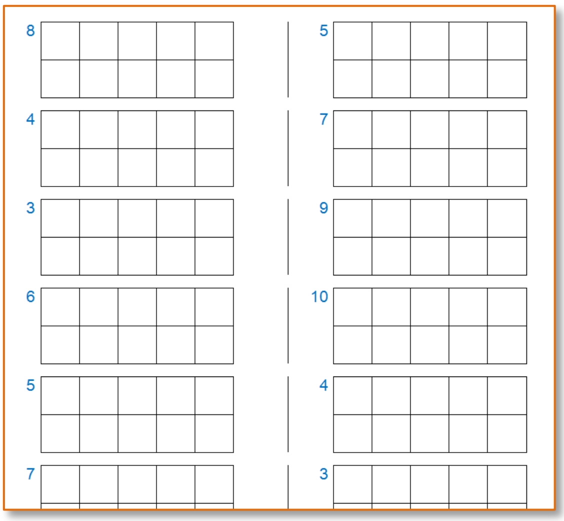


Schritt 4: Grafische Darstellung auf Arbeitsblättern

AB 1.3 ff

Vorgegebene Mengen werden ausgemalt bzw. in die Zehnerraster eingezeichnet (Reihenfolge beachten! Siehe S. 8). Empfehlenswert ist, zunächst die ungeradzahligen Mengen zu üben (Beispiel unten links) und dann ungerade und gerade zu mischen (Beispiel unten rechts).





Modul 2

Zerlegen der verinnerlichten Mengen in Teilmengen
(Mengen-Teilmengen-Beziehung)

Ziel:

Durch Zahlen repräsentierte Mengen
in Teilmengen zerlegen können.

3	
2	
0	
1	
3	

4	
2	
1	
4	
3	
0	

5	
3	
0	
4	
5	
1	
2	

6	
5	
3	
6	
1	
4	
2	
0	

7	
6	
4	
0	
2	
5	
7	
3	
1	

8	
4	
6	
7	
5	
2	
1	
0	
3	
8	

9	
5	
0	
8	
6	
4	
3	
1	
7	
5	
2	

10	
8	
6	
5	
2	
7	
9	
10	
3	
0	
4	
2	

<u>Modul 2</u>: Zerlegen der verinnerlichten Mengen in Teilmengen (Mengen-Teilmengen-Beziehung)

Wenn alle Mengenbilder völlig spontan erfasst werden, beginnt die Zerlegung der einzelnen Mengen in Teilmengen. Nun wird jedes Mengenbild einzeln auf allen Stufen der klassischen Lerntheorie bis zur Verinnerlichung bearbeitet (beachte auch „Arbeitsvorschläge Nr. 2“ auf www.merkmal.info). Erst dann kann zum nächsten Mengenbild übergegangen werden.
Begonnen wird stets mit der Menge 3 (wenn nötig auch mit der Menge 2) um das Kind mit dem Umgang der bilinearen Mengendarstellung vertraut zu machen. Der scheinbare Zeitverlust durch das Ansetzen auf dem Niveau der kleinsten Menge wird durch späteres, umso rascheres Voranschreiten mehr als wieder wettgemacht.
Auf der Ebene dieses Moduls ergeben sich deutliche Unterschiede, je nach kognitiver Grundbegabung des Kindes bzw. je nach Stand des Mengen-Zahl-Verständnisses. Bei manchen Kindern zeigen sich die Schwierigkeiten erst bei den Mengen 6 oder 7, andere wiederum können selbst die Menge 3 noch nicht zerlegen.

Auf dem Weg zur Verinnerlichung der Mengenzerlegungen werden die klassischen Stufen nach der Theorie der Aneignung von Lerninhalten durchlaufen:

Tabelle 1: Stufen der Lerntheorie und dazu passendes Lernmaterial

a) Handelnd-aktive Ebene	**b)** Bildlich-darstellende Ebene	**c)** Begrifflich-abstrakte Ebene
• Eierschachteln • Holzplättchen (Zahlenbox) • Spielplättchen in verschiedenen Farben	• Zerlege-Mappe	• Arbeitsblätter zum Zerlegen von Zahlen, z.B. „Zerlege-Blumen“ • Zerlege-Kärtchen

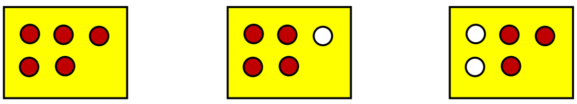
Beispielsweise: Zerlegen der Menge 5

a) *Handelnd-aktive Ebene*

„Mama überlegt: Ich habe 5 Eier in der Eierschachtel. Sie müssen für das Frühstück und für einen Kuchen reichen! Daher muss ich die Eier genau einteilen.
Zum Frühstück essen wir 3 Eier. Wie viele bleiben dann noch für den Kuchen?
Wenn Oma kommt brauchen wir 4 Eier zum Frühstück. Wie viele bleiben für einen kleinen Kuchen?“

Das Kind muss ergänzen, bzw. zerlegen und versteht, was es tut. Dabei wird auch der Begriff „0“ eingeführt: *„Wenn Opa auch kommt brauchen wir 5 Eier. Wie viele bleiben für einen kleinen Kuchen?“*

Folgende Zerlegungen sollen erarbeitet werden:

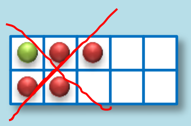


Mit diesen drei Zerlegungen (inklusive 5 und 0) kann das Kind dann später alle Rechenoperationen mit 5 und seinen Teilmengen durchführen. Der Vorteil ist, dass das Kind weniger verinnerlichen muss – im Falle der Menge 5 nur zwei zusätzliche Bilder. **Diese bestehen aus den bereits bekannten Mengenbildern!**

Es werden keine Rechnungen angeschrieben noch irgendwelche Hinweise darauf gegeben, dass es sich hier um eine Rechnung handeln könnte.

Die Anordnung, 2+3 oder 3+2, spielt jetzt und auch später keine Rolle. In der Darstellung durch Gegenstände oder Bilder wird deshalb stets darauf geachtet, dass geradzahlige Mengen niemals „schief versetzt“ dargestellt werden.

Nicht so:



Beachte auch „Arbeitsvorschläge 2“
Download auf www.merkmal.info

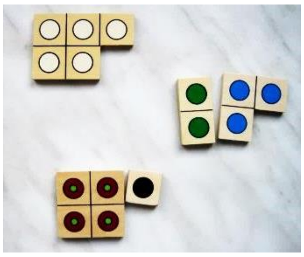
Farbplättchen

Das Kind legt Fünfer-Mengen, deren Zerlegungen durch die unterschiedlichen Farben der Plättchen dargestellt werden. *Die Teilmengen sind wiederum bereits bekannte Mengenbilder*. Dies kommt besonders den lernschwächeren Kindern zugute, da sie keine Umstrukturierungen oder Auflösungen der Mengenbilder vornehmen müssen.

Damit die Zerlegungen in „Fleisch und Blut“ übergehen ist es notwendig, dass sehr viele Fünfer-Mengen gelegt werden – z. B. der ganze Tisch voll.

Holzplättchen (Zahlenbox, MERLIN, Didakt GmbH)

In einer Schachtel liegen alle Plättchen der Zahlenbox, die für das Zusammensetzen der Menge 5 gebraucht werden.



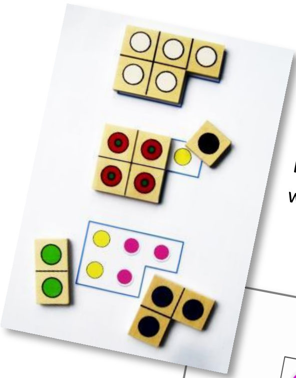
- Das Kind legt auf ein Fünferplättchen die beiden Teilmengen, die 5 ergeben und spricht: *„Vier – eins – fünf -/- eins – vier – Fünf.“*
- Das Kind nimmt ein Plättchen und sucht die andere Teilmenge zu dem Ganzen. In jeder Hand ein Plättchen, wird gesprochen: *„Zwei – drei – fünf -/- drei – zwei - fünf.“* oder *„Fünf – null – fünf -/-null – fünf - fünf.“*

b) *Bildlich-darstellende Ebene*

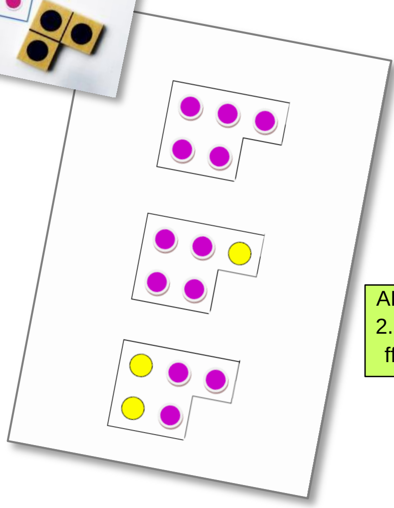
Zerlege-Mappe

Die Arbeit mit der Fünfer-Menge wird nur noch anhand bildlicher Darstellungen des Ganzen und dessen Teilmengen durchgeführt. Dafür liegt eigens eine Mappe bereit, in der alle Mengen bis 10 und deren Zerlegungen in der bilinearen Anordnung dargestellt sind. Die Teilmengen entsprechen den im Modul 1 bereits verinnerlichten Mengenbildern.

Zwei Kinder oder ein Kind und ein Elternteil fragen einander ab. So sagt z. B. das Kind mit der Mappe vor sich *„vier“* und der Lernpartner antwortet *„eins“*.



Zur Einführung der Zerlege-Mappe können die Holzplättchen auf die Mengen-Darstellungen gelegt werden (Abb. links).



AB 2.1 ff

Die Übungen mit der Zerlege-Mappe sind *sehr* wichtig! Es wird dringend angeraten, solange bei einer Menge zu bleiben und nicht voranzuschreiten, bis diese felsenfest verinnerlicht ist.

Die Zerlege-Mappe muss bis zur Verinnerlichung aller Mengen für das Kind jederzeit verfügbar bzw. einsehbar sein.

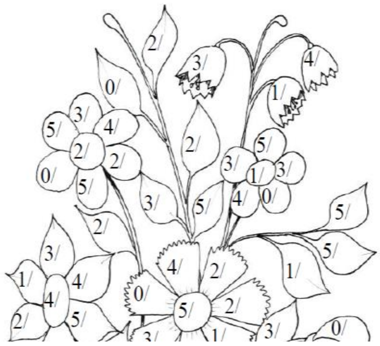
c) *Begrifflich-abstrakte Ebene*

Nach erfolgreicher Verinnerlichung der Mengen-/Teilmengen-Bilder dominieren die Zahlen als Mengen-Symbole den Umgang mit der Mengen-Teilmengen-Beziehung. Methodisch führt der Weg wiederum über häufiges und „hochfrequentes Üben“. Da die Kinder nie mit schwer zu lösenden Aufgaben konfrontiert sind und bereits viele Erfolge in der Rechenförderung erfahren haben, sind sie im Allgemeinen ganz wild auf das Abarbeiten vieler Aufgaben – auch dann, wenn das Kind früher beim Anblick eines kleinen Rechenaufgabenblockes schier verzweifelte.

AB 2.2 ff

Beispiel: *Zerlege-Blumen*

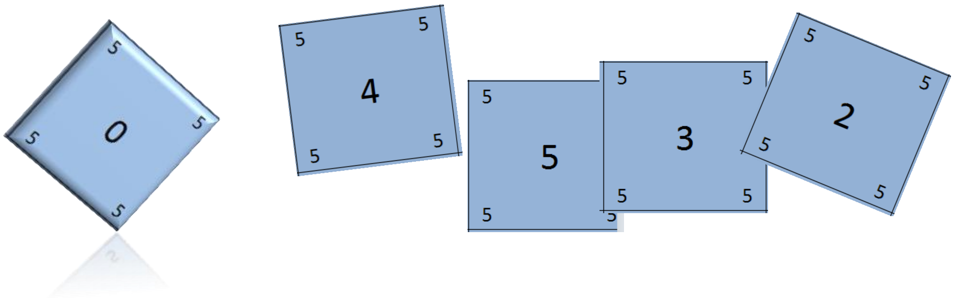
Ähnlich motiviert wie beim Ausfüllen von Kreuzworträtseln ergänzen die Kinder von einer vorgegebenen Teilmenge auf das Ganze. Häufige Wiederholungen sind das Ziel. Zögert das Kind auch nur leicht bei einer Aufgabe (genaues Beobachten), so ist bei genau dieser Aufgabe noch einmal die Zerlegung auf einer tieferen Ebene zu üben. Besonders am Anfang soll hier solange es das Kind will die Zerlegemappe noch aufgeschlagen und einsehbar neben dem Arbeitsblatt auf dem Tisch liegen.



AB 2.3 ff

Beispiel: *Zerlege-Kärtchen*

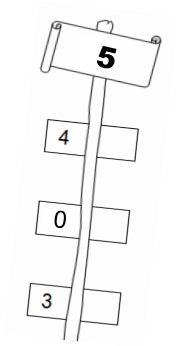
Mit einem Stapel von Zerlege-Kärtchen wird das Ergänzen in verschiedenen Lern-Formen (Stillarbeit, Partnerarbeit, usw.) eingeübt. Das Ganze, hier die Anzahl 5, scheint in den Ecken der Kärtchen auf. Im Zentrum des Kärtchens steht der vorgegebene Teil des Ganzen. Zur Selbstkontrolle steht die Lösung auf der Rückseite der Kärtchen.



AB 2.4 ff

Beispiel: *Zerlege-Türme*

Zielführend sind auch die aus verschiedenen Schulbüchern bekannten „Zerlege-Türme“. Allerdings sind die wenigen, meist alle Zahlen im ZR 10 zugleich aufweisenden Beispiele weniger als ein Tropfen auf den heißen Stein und können kaum als „Input“ ernst genommen werden. Um eine Wirkung zu erzielen, sind wiederum viele Beispiele notwendig. (Weitere Beispiele in der Arbeitsblättersammlung)

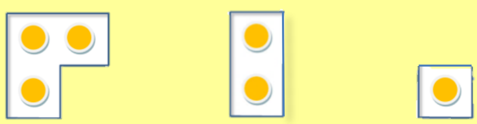


5	
3	
0	
4	
5	
1	
2	

Festigung der Mengenzerlegung und Vorbereitung auf die Rechenoperationen

Nachdem die ersten beiden Mengen 3 und 4 bis zur völligen Verinnerlichung zerlegt wurden und das Kind sich diese Zerlegungen im Geiste vorstellen kann (nach dem gegenseitigen Ausfragen mit der Zerlegemappe), folgen die „Rätsel“ mit den Mengen 3 und 4. Dies erweitert sich unmittelbar nach jeder bis zur Verinnerlichung erarbeiteten Menge.

1. Schritt: Das Kind darf die Mengenlegeplättchen (z. B. Zahlenbox von MERLIN) oder anderes passendes Anschauungsmaterial (z. B. Zerlegemappe) noch vor sich liegen haben und führt die Handlungen mit dem Material durch.



Hier werden die mathematischen Operationen, die dem Kind dann später in der Symbolsprache begegnen, schon spielerisch eingeübt.

Rätsel Typ 1 (Das ist die spätere Addition):

Ich habe 2 und gebe 1 dazu.
Ich habe 0 und gebe 3 dazu.
ich habe 2 und gebe 2 dazu. usw.

Rätsel Typ 2 (Das ist die spätere Subtraktion):

Ich habe 3 und nehme 1 weg.
Ich habe 4 und nehme 0 weg. usw.

Rätsel Typ 3 (Das ist die spätere Ergänzung mit Plus):

Ich habe 2, aber ich möchte 3. usw.

Rätsel Typ 4 (Das ist die spätere Ergänzung mit Minus):

Ich habe 3, aber ich möchte nur 2. usw.

Nachdem der jeweilige Rätselt-Typ abgefragt wurde, erfolgt ein *Rollentausch* bevor zum nächsten Rätsel-Typ übergegangen wird – also das Kind formuliert das Rätsel bzw. die Frage. Das führt dazu, dass das Kind seine Gedanken ordnen, sich die Sachverhalte vorstellen und verbalisieren muss. Diese Denkvorgänge sind der Grundstein für späteres mathematisches Verständnis des Kindes.

<u>2. Schritt:</u> In diesem Schritt werden die „Rätsel“ des 1. Schrittes nur noch in der Vorstellung und rein verbal formuliert und gelöst. Das Sprechen über mathematische Vorstellungen und das Erklären von mathematischen Operationen ist Gegenstand dieser Sequenz.

Nachdem alle Mengen bis 10 erarbeitet und verinnerlicht worden sind, werden alle Mengen auf dem Niveau des 2. Schrittes noch einmal gemischt abgehandelt.

Das Zerlegen der Mengen wird noch längere Zeit, über dieses Modul 2 hinaus fast täglich einmal schnell anhand des Zahlenzerlegeblattes (AB 0.1) wiederholt. AB 0.1

Ehe zum Anwenden des Gelernten in den Rechenoperationen (Modul 3) übergegangen werden kann, müssen allfällige Unsicherheiten beim Zerlegen noch *dringend* erkannt und beseitigt werden. Zur Überprüfung dient das „Zahlenzerlegeblatt“ der Ist-Standerhebung (AB 0.1, siehe auch S. 8). Das Kind muss das Zahlenzerlegeblatt mündlich flüssig abarbeiten können. Eine Stoppuhr in der Hand motiviert das Kind, möglichst schnell vorzugehen (obwohl die Zeitmessung wenig Belang hat). Leichtes Stocken ist ein Hinweis darauf, dass einzelne Mengen-Teilmengen-Beziehungen noch nicht ausreichend gefestigt sind und noch einmal bearbeitet werden müssen!

Die Kompensation ungenügend gefestigter Mengen-Teilmengen-Beziehungen belastet das Arbeitsgedächtnis der Kinder beim Erlernen der Rechenoperationen unnötig, ja, es stellt sogar ein großes und leider verkanntes Hemmnis beim Erlernen der Rechenoperationen dar!
Es hat leider Tradition, dass das erste Schuljahr durch das Ignorieren des Inhalts dieses basalen Moduls vergeudet wird. Das große Erwachen stellt sich meist im Verlauf des 2. Semesters ein, wenn die „Zehnerüber- und -unterschreitung“ eingeführt werden soll.

Modul 3

Rechenoperationen im ZR 10

Ziele:

- **Bewusstheit darüber, dass die bekannten Handlungen mit Mengen die mathematischen Operationen Addition, Subtraktion und Ergänzung sind.**
- **Verschriftlichung der mathematischen Operationen**
- **Verknüpfung des Grundgedankens der Operationen zwischen Handlung und sprachlicher/symbolischer Repräsentationen**
- **Diese Operationen im ZR 10 im Kopf bzw. halbschriftlich lösen können.**

$4 + 3 = ?$

$3 + 4 = ?$

$7 - 3 = ?$

$7 - 4 = ?$

$7 - ? = 4$

$7 - ? = 3$

$3 + ? = 7$

$4 + ? = 7$

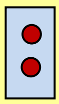
$7 = 3 + ?$

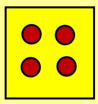
a) Einführung mathematischer Begriffe und deren Symbole (mathematische Notation)

Die mathematischen Begriffe „Plus“, „Minus“ und „Gleich“ und ihre Zeichen (+, -, =) sind eventuell schon bekannt, sollen aber trotzdem erklärt oder erarbeitet werden.

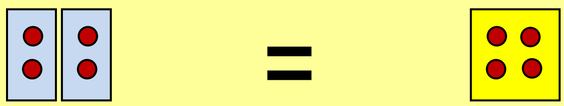
Das Gleichzeichen

Das Wort „gleich“ für sich alleine hat in der Alltagssprache der Kinder die Bedeutung von „einen Moment, bitte“ (z.B. „Ich komme gleich“). Den somit bekannten Begriff „gleich“ mit einem völlig anderen Inhalt zu gebrauchen, kann Kindern Mühe machen und zum gedanklichen Abschweifen führen.
Deshalb sollte das mathematische Symbol „gleich“ (=) über die den meisten Kindern geläufige Redewendung *„ist gleich viel wie“* oder *„hat gleich viele wie“* eingeführt werden.
Zum Einstieg können ein paar richtige Eierschachteln mit Kunststoffeiern und Kartonkärtchen mit Gleichzeichen bereitgelegt werden. Die Kinder können dann handelnd Gleichungen erstellen. Je nach Leistungsfähigkeit des Kindes kann aber auch gleich (unmittelbar) mit bildlichen Darstellungen begonnen werden.

Beispiel: Lisa hat 

Paul hat 

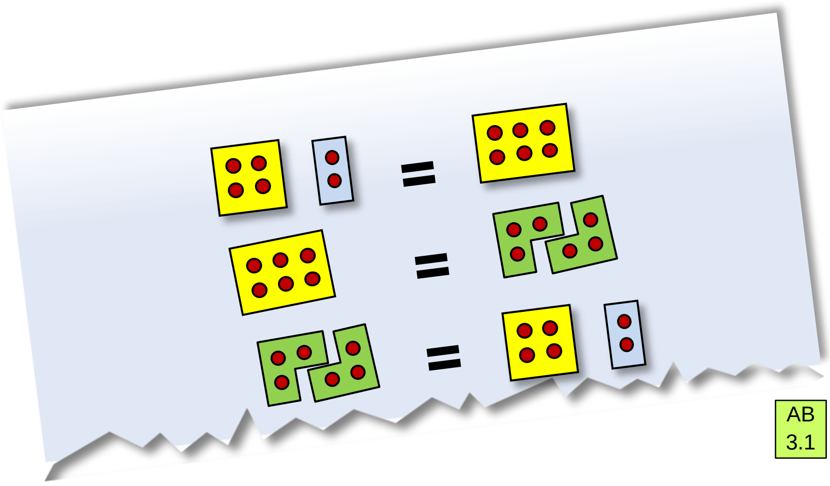
Wer hat mehr?
Was muss geschehen, damit beide gleich viel haben?



Lisa hat gleich viele wie Paul.

Oder:
Zwei und zwei sind gleich viele wie vier.

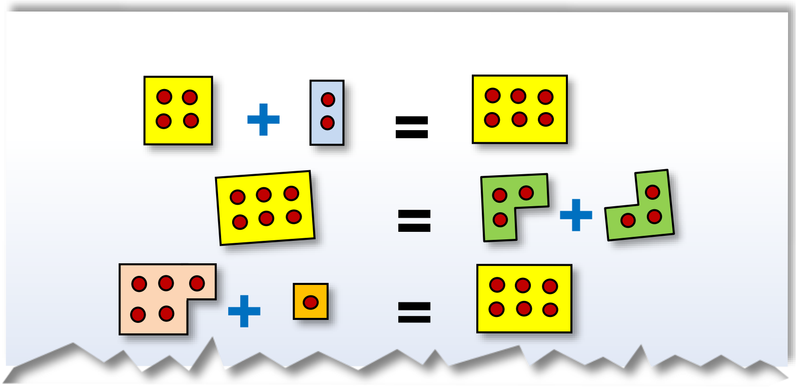
Zum Einüben wird eine große Karte mit Gleichzeichen gereicht, auf der die Holzplättchen (Zahlenbox, MERLIN, Didakt GmbH) oder ähnliches Legematerial ausgelegt werden (siehe nebenstehende Abb.). Beim gegenseitigen Vorlesen des Gelegten wird aus „Bequemlichkeitsgründen“ nur noch „Vier, zwei, ***gleich*** sechs“ gesprochen.



AB 3.1

Der Operator „Plus“

Je nach Belastbarkeit des Kindes kann der Operator „Plus“ auch gleich mit dem Gleichzeichen oder etwas später eingeführt werden. Die hier unten gezeigte Anordnung (z.B. auch als Arbeitsblatt) soll keine Rechnung im herkömmlichen Sinn darstellen, sondern dient nur der Vermittlung der Begriffe „Plus“ und „Gleich“ und deren Symbole.



Das Verständnis der Begriffe und deren sprachliche Anwendung wird geübt indem zum Arbeitsblatt gesprochen wird: *„Vier* ***plus*** *zwei* ***gleich*** *sechs*.“ oder: *„Drei* ***plus*** *drei* ***gleich*** *vier* ***plus*** *zwei*.“ usw.

Nachdem diese mathematischen Begriffe in der Gedankenwelt des Kindes gefestigt sind, wird die bereits bekannte Übung mit den Holzplättchen (Zahlenbox, MERLIN, Didakt GmbH) unter dem Aspekt einer ausformulierten mathematischen Operation ausgeführt: Das Kind nimmt wie gewohnt in jede Hand ein Plättchen und spricht aber nun z. B. *„Zwei plus drei gleich fünf. – Drei plus zwei gleich fünf*.“ und legt die Plättchen auf den Tisch. Auch die Null kann dadurch eingeübt werden, indem sich in der einen Hand kein Plättchen befindet.

Der Operator „Minus“

Mehr oder weniger in Einheit mit der obigen Übung mit den Holzplättchen wird nun der Operator „Minus“ eingeführt (nicht mittels Arbeitsblatt, damit der Operator Minus nicht mit dem Plus interferiert). Hat nämlich das Kind die beiden Plättchen (z.B. Zwei plus drei gleich fünf) auf den Tisch gelegt, spricht es sogleich: *„Fünf minus zwei gleich drei!“*, und nimmt das Zweierplättchen wieder weg. Die „Tauschaufgabe“ kann allerdings nicht gebildet werden.

Eine Schreib- oder Leserichtung existiert für das Kind in dieser Phase noch nicht bzw. wird von der unterrichtenden Person noch nicht festgelegt. Es geht nur um den Umgang mit Mengen und das Lenken der Gedanken hin zum Bewusstwerden der Rechenoperationen Addition und Subtraktion und deren „standardisierte Formulierungen“. Die Verschriftlichung dieser Operationen, die in der herkömmlichen Auffassung als Rechnen schlechthin betrachtet wird, erfolgt im nächsten, wieder sehr einfachen Schritt.

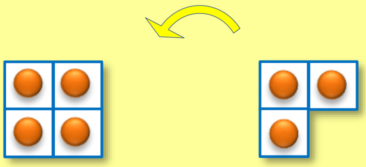
b) Einführung der mathematisch formalen Rechenoperationen

Die Addition

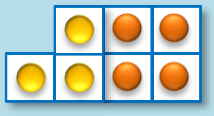
Aufbauend auf den Mengen-Teilmengen-Beziehungen wird – eingebettet in eine Geschichte – die Addition eingeführt. Anhand der bekannten Mengendarstellung mit den Eierkartons wird dem Kind die Analogie der anfänglichen Handlungen mit Mengen zu den Rechenoperationen, hier die Addition, gegenständlich vor Augen geführt. Begonnen wird mit der Summe 3. Die Aufgaben und Übungen werden bis zur Festigung jeweils nur mit *ein und derselben Summe* (Schwerpunktzahl) durchgeführt. Sind alle Additionen mit der Summe 3 gefestigt, startet der ganze Prozess mit der Summe 4 usw. Fortgefahren wird nach der individuellen Kapazität jedes Kindes. Das unten angeführte Beispiel erläutert die Vorgangsweise anhand der Summe 7.

Beispiel: **Summe 7**

Einstieg:
„Auf dem Tisch sind 4 Eier.
Julia bringt 3 Eier dazu.
Wie viele sind nun auf dem Tisch?“



Bei der handelnden Addition ist darauf zu achten, dass geradzahlige Mengen nicht schief versetzt gelegt werden (s. S. 21). Deshalb wird die Einführung in die Verschriftlichung der Addition nur mit jenen Mengen handelnd durchgeführt, bei denen sich die Mengen „schön“ fügen. Die Mengenbilder können aber schon bald gedreht werden, wie z.B. 3 + 4 = 7



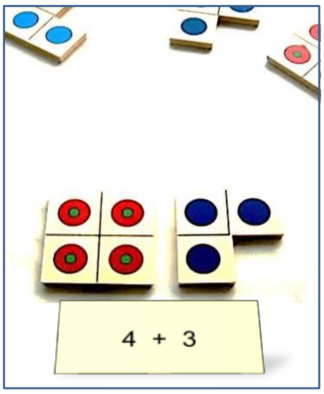
Der Umgang mit den Mengen Vier, Drei und Sieben und ihre Beziehung zueinander ist den Kindern bekannt. *„Was Julia gemacht hat, kann ich aufschreiben“*, könnte die Einleitung zur Verschriftlichung der Rechenoperation lauten. „*Vier plus drei gleich sieben schreibt man so*.“

$$4 + 3 = 7$$

Die verschriftlichte mathematische Beziehung der Mengen wird gelesen:

„Vier plus drei gleich sieben.“

In der Folge werden nun alle möglichen Additionen mit der Summe 7 mit den Holzplättchen (nebenstehende Abb.: Zahlenbox, Merlin, Didakt GmbH), wie im Modul 2 unter dem Punkt „Handelnd-aktiven Ebene“ beschriebenen, hochfrequent geübt.

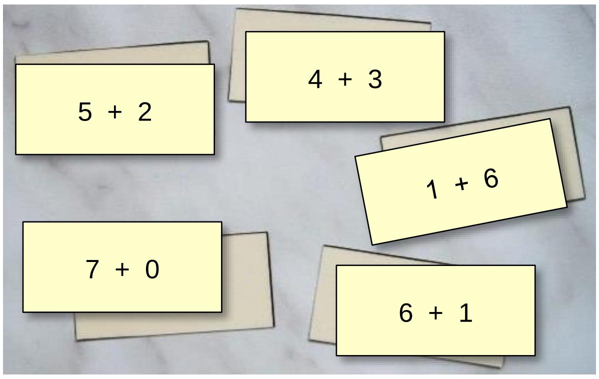


Dabei hält das Kind je ein passendes Holzplättchen in jeder Hand und spricht z. B.: „*Vier plus drei gleich sieben*!“ und legt sie nebeneinander auf den Tisch. Zugleich soll auch wie im Modul 2 bereits geübt, die Tauschaufgabe („*Drei plus vier gleich sieben*!“) formuliert werden. Auch die Null kann dadurch eingeübt werden, indem sich in der einen Hand kein Plättchen befindet. Nun legt das Kind aber noch das passende Rechenkärtchen dazu. Auch der umgekehrte Weg, Mengenplättchen legen zu einem Rechenkärtchen, wird geübt.

Nun werden die Kinder darauf hingewiesen, dass das eigentlich Rechnungen sind und in das Heft (oder auf ein Blatt) geschrieben werden können.

Schreibübungen im Heft sind aber auf das notwendige Maß zu beschränken. Effektiv gearbeitet wird anhand von Arbeitsblättern und Lernkärtchen (Abb. unten), die das Üben möglichst vieler Aufgaben in möglichst kurzer Zeit erlauben. Die Lernkärtchen werden eingesetzt, nachdem die Addition mit den Mengen bzw. Schwerpunktzahlen 3 und 4 eingeführt wurde. Idealerweise besitzt jedes Kind einen eigenen Stapel von Lernkärtchen, damit ein ortsunabhängiges Üben ermöglicht wird. Der Stapel vergrößert sich durch jede weitere Schwerpunktzahl. Gut beherrschte Aufgaben werden aussortiert, jedoch verfügbar gehalten. Um die Kärtchen zu verwahren, sind zwei kleine Schächtelchen oder Dosen sehr praktisch. So können in dem einen Schächtelchen die schon gut gelernten Kärtchen verwahrt werden und im anderen die noch zu übenden Kärtchen. Ergeben sich Unsicherheiten bei einzelnen Rechnungen, so ist die entsprechende Vorstellung der Mengenbeziehung mittels Übungen nach Modul 2 zu sanieren.

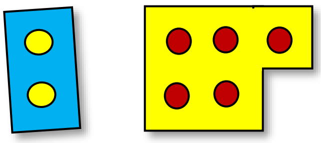
AB 3.2 f



Mündliche Aufgabenstellungen in Partnerarbeit stellen die höchste Form der Verinnerlichung dar.

Um die Vorstellung von den Mengen und der Handlung der Rechenoperation evident zu halten, soll von Zeit zu Zeit zwischendurch kurz folgende Übung durchgeführt werden:

> Dem Kind werden stumm zwei Mengen-Plättchen vorgelegt und das Kind formuliert die Handlung so, wie man sie aufschreiben würde: „*Zwei plus fünf gleich sieben*."



Wenn schließlich alle Teilschritte und Aufgaben beherrscht werden, können, wenn als sinnvoll erachtet, die Rechenkärtchen der bereits eingeübten Schwerpunktzahlen mit den neuen Kärtchen der aktuellen Schwerpunktzahl vermischt und wiederholt werden.

Die Subtraktion

In gleicher Weise wie bei der Addition wird auch bei der Subtraktion verfahren. So soll sich das Kind die Sprechweise zur Festigung der Verschriftlichung der Handlung durch ausreichend viele Wiederholungen einprägen. Die (in der VS noch durch die natürlichen Zahlen N_0 gegebene) Sinnlosigkeit von Tauschaufgaben bei der Subtraktion ist anschaulich zu vermitteln.

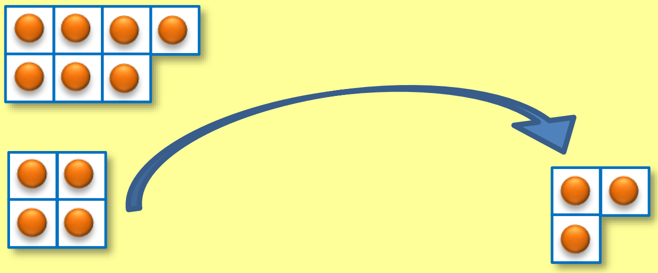
Begonnen werden soll wiederum mit der Menge 3 als Minuend. Alle Schritte des Erarbeitens und des Einübens werden mit Aufgaben des Minuenden 3 bis zur Festigung durchgeführt ehe zu Aufgaben mit dem Minuend 4 übergegangen wird usw. Dadurch entsteht der Sog des „Next-Level-Effektes", der die Kinder antreibt.

Exemplarisch wird im Folgenden die Vorgangsweise mit dem Minuend 7 dargestellt.

Beispiel: Minuend 7

Einstieg (Darstellung bei Bedarf mit den Eierkartons)**:**

„Mama hat 7 Eier. Sie nimmt zum Kochen 3 Eier weg. Wie viele bleiben noch übrig ?“



Es wird nun die oben durchgeführte Handlung notiert:

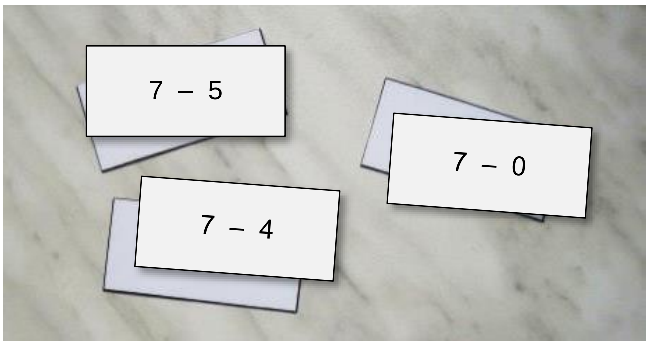
$$7 - 3 = 4$$

Die verschriftlichte mathematische Beziehung der Mengen wird gelesen:

„Sieben minus drei gleich vier.“

Wird mit Mengen-Plättchen geübt (z. B. aus der Zahlenbox), dann nimmt das Kind beispielsweise nach der Vorgabe „7 – 2“ die Mengen 2 und 5 in je eine Hand, hält die beiden Plättchen zusammen und spricht dazu: „Sieben minus fünf gleich zwei.“ Dabei versteckt es die Hand mit der Menge 5 hinter dem Rücken. Dies ist ein komplexer Vorgang und verlangt vom Kind bereits eine gute Verinnerlichung der Mengenbeziehungen, denn es muss die Operation schon bis zum Ende durchdenken und planen, ehe es die Handlung durchführten kann.

Für intensives Üben können aber schon bald Lernkärtchen (nebenstehende Abb.) und Arbeitsblätter zum aktuellen Minuend (Schwerpunktzahl) eingesetzt werden. Leicht zu lösende Aufgaben werden sukzessive aussortiert. Wenn dann auch die schwierigste Aufgabe beherrscht wird, werden noch einmal alle Kärtchen durchgearbeitet.



AB 3.3 f

Im Heft oder auf einem Arbeitsblatt kann die Schreibweise eingeübt werden.

Mündlich gestellte Aufgaben schließen die Arbeit mit dem aktuellen Minuenden ab. Dabei können auch Subtraktionen von bereits durchgearbeiteten Minuenden beigemischt werden.

AB 3.4

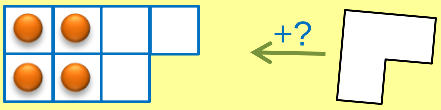
Die Ergänzungen

Das Merkmal der Ergänzungen – im Unterschied zur Addition und Subraktion – ist die vorgegebene Zielmenge: *„Soviele sollen es werden*!“

Je nachdem, ob etwas weggenommen oder dazugegeben werden muss, um das Ziel zu erreichen, lassen sich die Ergänzungen in zwei Operationen unterteilen:

Ergänzen mit Plus

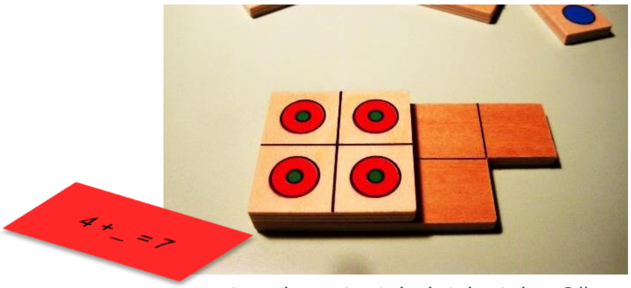
Beispiel: *Mama macht einen Kuchen. Sie braucht dazu 7 Eier. Aber in der Schachtel sind nur noch 4 Eier. Wie viele muss sie besorgen?*



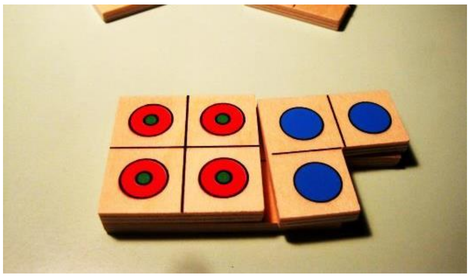
4 + __ = 7

„Vier plus wieviel gleich sieben?“ stellt die Verschriftlichung der Fragestellung der Geschichte dar.

Das Ergänzen kann mit Legeplättchen geübt werden. Beispielsweise wird bei der Aufgabe 4 + ☐ = 7 anfangs das Grundplättchen der „Zielmenge 7“ zuerst gelegt. Dann legt das Kind das 4er-Plättchen auf das Grundplättchen und spricht: *„Vier plus wieviel gleich sieben*?“ Nun sucht es das fehlende 3er-Plättchen und führt die Ergänzung handelnd durch.

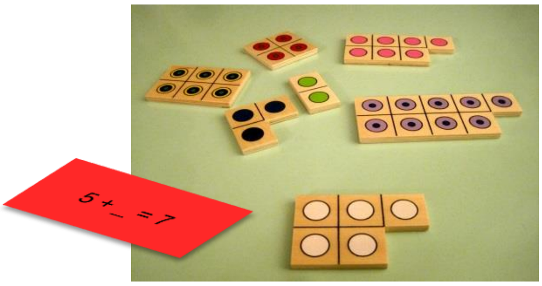


„Vier plus wieviel gleich sieben?“

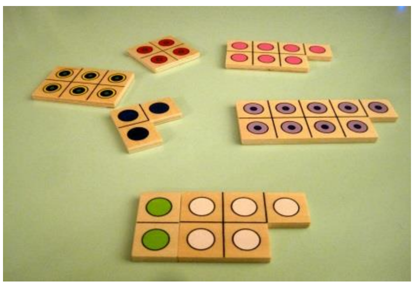


„Vier plus drei gleich sieben!“

Schon bald werden die schriftlich oder mündlich vorgegebenen Ergänzungsaufgaben ohne „Zielmengenplättchen“ gelegt, so wie in der Abbildung unten mit der Aufgabe 5 + ☐ = 7 . Dass die zu ergänzende Menge links angefügt werden muss, stellt erfahrungsgemäß kein Problem dar.



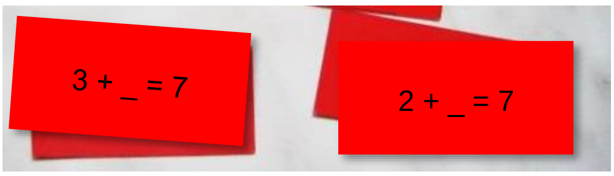
„Fünf plus wieviel gleich sieben?“



„Fünf plus zwei gleich sieben!“

AB 3.5 f

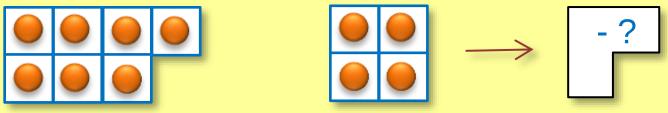
Hochfrequent geübt wird anschließend mit den Kärtchen (Abb. links) oder mit Arbeitsblättern. Mündlich gelöste Aufgaben, die mündlich gestellt wurden, stellen den Abschluss dieser Lerneinheit dar.



Ergänzen mit Minus

Beispiel: *In der Eierschachtel sind 7 Eier. Pauli möchte eine Eierspeise machen. „Lass mir noch 4 Eier übrig!“, sagt Mama. Wie viele darf Pauli für eine Eierspeise herausnehmen*?

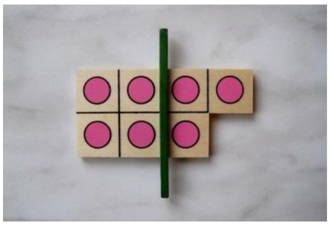
Die Aufgabenstellung wird handelnd vollzogen, gleich verschriftlicht und verbalisiert: *„Sieben minus wieviel gleich vier*?“



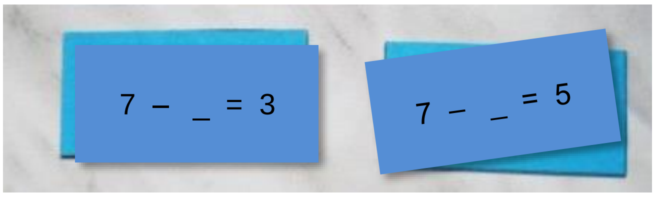
7 – __ = 4

Beim Legen mit Plättchen sollte allerdings noch nicht die Leseart der Verschriftlichung als Formulierung der Handlung verwendet werden, um Verwirrungen vorzubeugen. Besser wäre die handlungsnahe Formulierung: *„Ich habe sieben. Wie viele kann ich wegnehmen, so dass noch vier übrig bleiben? Drei!“*

Die zu entfernende Menge wird zunächst mittels Stäbchen markiert und dann die wegzunehmende Menge bezeichnet und mit den Fingern abgedeckt. (Abb. rechts).



Anhand von Arbeitsblättern und Lernkärtchen werden viele Aufgaben geübt.



AB 3.6 f

Folgender Block mit Aufgaben zu der *Schwerpunktzahl Sieben* kann nun gelöst werden:

4 + 3 = ?
3 + 4 = ?
7 – 3 = ?
7 – 4 = ?
7 – ? = 4
7 – ? = 3
3 + ? = 7
4 + ? = 7
7 = 3 + ?

Wichtig ist, dass nicht nur auf das richtige Ergebnis geachtet wird, sondern dass man sich vom Kind den Rechenvorgang immer wieder beschreiben lässt. Die Symbolsprache muss nicht nur wortwörtlich geübt werden (z.B. „Vier plus Drei gleich Sieben.“) sondern vor allem auch sinngemäß.
Z. B.:
„Hier sollten es 4 sein. Wenn ich von 7 also 3 wegnehme, dann stimmt es.“
„Ich habe 3, aber ich möchte 7, also muss ich 4 dazugeben.“

AB 3.7 ff

Werden alle Rechenoperationen zu der Schwerpunktzahl beherrscht, dann erfolgt das Üben mit den gesamten, durchmischten Rechenkärtchen dieser Schwerpunktzahl. Als Steigerungsstufe können die Kärtchen der aktuellen Schwerpunktzahl mit den Rechenkärtchen der vorherigen Schwerpunktzahl durchmischt und geübt werden.

Abschließend werden analog zu den „Rätseln“ auf Seite 23f verbal Rechengeschichten vorgegeben und das Kind schreibt dazu die passende Rechnung: z. B. *„Paul hat 9 Sticker gekauft und schenkt davon 3 seiner Schwester. Wieviele hat er noch?“* → 9 – 3 = 6 usw.

Sind alle Zahlen und Rechenoperationen auf diese Weise durchgearbeitet, und kann das Kind die „Rechenrätsel“ richtig umsetzen, dann ist es im ZR 10 sicher und *bereit für die Zehnerüberschreitung*.

Modul 4

Zahlenraum 19

Ziel:

Zahlen im ZR 19 bildlich verinnerlichen,
schreiben und lesen können.
Vorbeugung gegen Zahlendreher

11
12
13
14
15
16
17
18
19

Rechnen im 2. Zehner

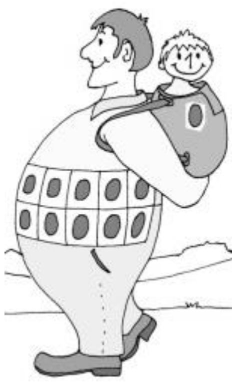
15 + 2 =
14 – 2 =
11 + 4 =
14 – 3 =
13 + 5 =
17 – 3 =
13+ ___ = 16
14 – ___ = 10

Bei der Schreibweise und Sprechweise der Zahlen größer als 9 handelt es sich um rein abstrakte und historisch gewachsene Konventionen, die für ein Kind weder praktisch noch auf den ersten Blick plausibel sind. Viele Kinder brauchen aber eine vorstellbare und in sich plausible Begründung der Schreib- oder Sprechweise von Zahlen größer als 9. Die häufig auftretenden Probleme mit Zahlendrehern bzw. mit dem Stellenwertsystem resultieren aus der fehlenden „fassbaren" Begründung dieser Konventionen.
Um diese Probleme zu vermeiden, hat sich das Einbetten in eine Geschichte und die *Personifizierung* von Mengen als sehr zuverlässiges Hilfsmittel für das Kind erwiesen. Die im Folgenden dargestellten Geschichten mögen den Geschmack Erwachsener nicht in jedem Fall treffen – den Kindern ist dies jedoch einerlei.

A Die Begriffe Zehner und Einer einführen und ihre Position im Stellenwertsystem festlegen

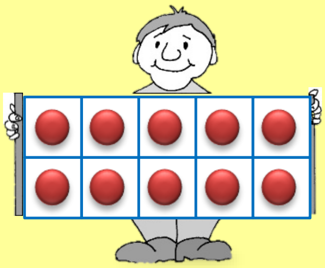
AB 4.1

Es war einmal *ein starker Zehnerpapa und sein Kind. Die machten eines Tages eine Wanderung in die nahen Berge. Am Anfang war es noch lustig, weil sie ein Reh und ein Eichhörnchen gesehen hatten. Auch beim Bergbächlein fanden sie es noch schön. Aber dann wurde das Kind immer müder. Kein Wunder, denn das Kind war ja kleiner als der große Zehnerpapa und der Weg war so weit. „Weißt du was?", sagte der Papa, „Setz' dich in meinen Rucksack und ich trage dich." Da schlüpfte das Kind in den Rucksack und wurde vom Zehnerpapa getragen. Zuhause staunte die Mama, als sie die beiden so sah. „Mein lieber kleiner Einer und mein großer Zehner", sagte sie.*

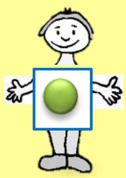


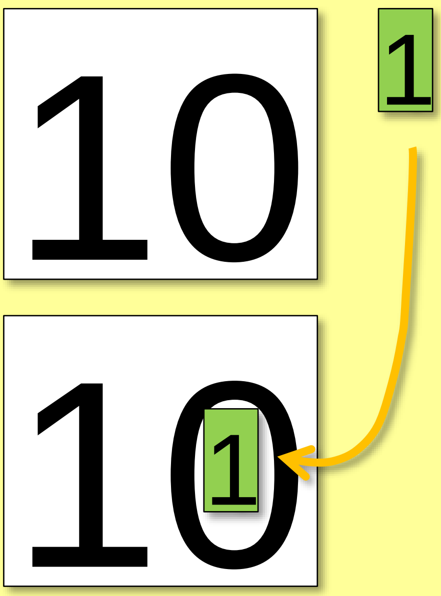
AB 4.2 ff

Das ist der Zehnerpapa.



Und das ist sein Kind.
Das Kind ist kleiner
und heißt Einer.





Zeigen und sprechen:
„Zehn – eins,
und das Kind darf
in den Rucksack sitzen."

<u>*Wichtig*</u>! Die Leseart der Zahlen wird hier noch nicht praktiziert! Sie ist dann Gegenstand eines späteren Schrittes!

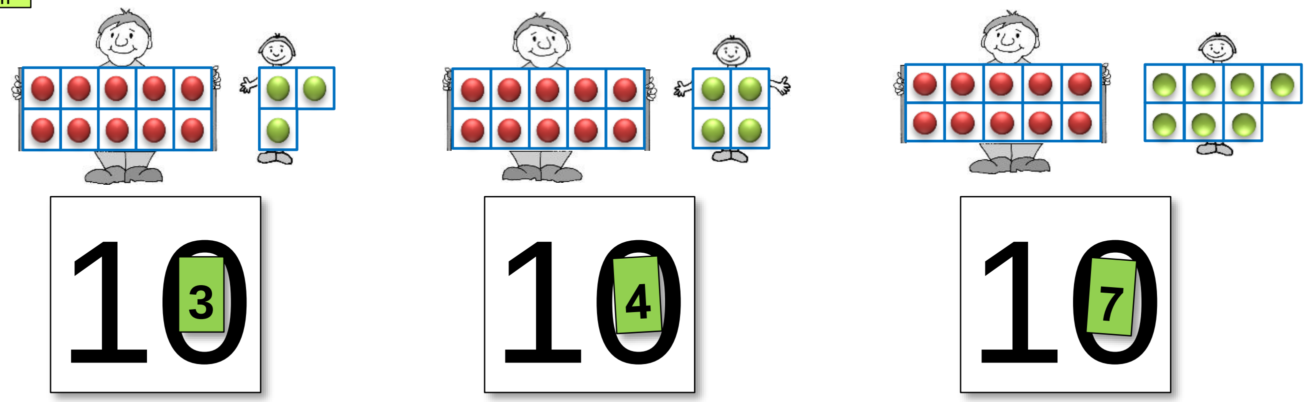
Hier soll mittels Geschichte und den symbolisch-bildlichen Darstellungen die räumliche Situation festgelegt werden.

Die Zehner haben ihre Position links und die Einer rechts. Dadurch, dass der Einer in den Rucksack schlüpfen darf, nimmt er narrativ und emotional seine ihm von den Mathematikern zugedachte Position im Stellenwertsystem ein.

Die Darstellungsform von Mengen größer als 10 und die Symbolisierung mittels Ziffern soll nun eingeübt werden.

Beispiel: Auf dem Tisch liegen neun personifizierte Zehner- und neun (1-9) Einerkärtchen. Nun werden allen Zehnerpapas Kinder zugeordnet. Beim Benennen der Mengen werden hier die Zehner zuerst genannt und dann erst die Einer, also „zehn – drei“.

AB 4.2 ff

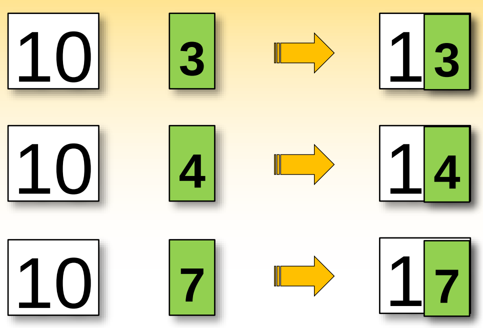


„Zehn – Drei,
Drei darf in den Rucksack!“

„Zehn – Vier,
Vier darf in den Rucksack!“

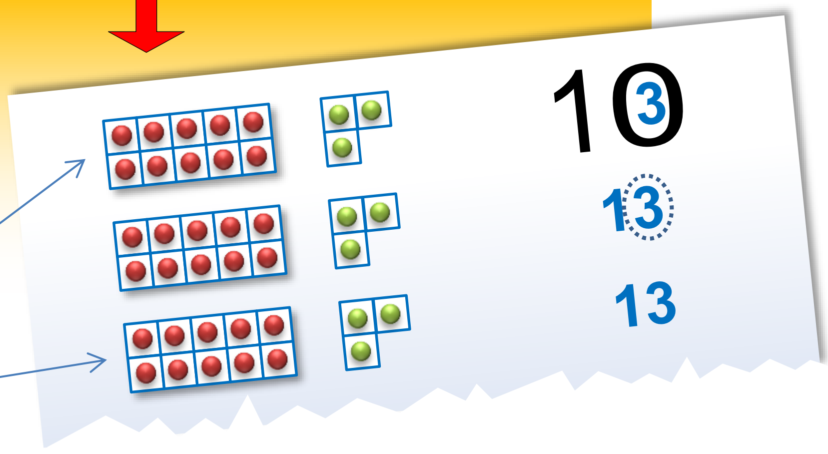
„Zehn – Sieben,
***Sieben* darf in den Rucksack!“**

„Zehn – Drei, und Drei darf in den Rucksack sitzen.“



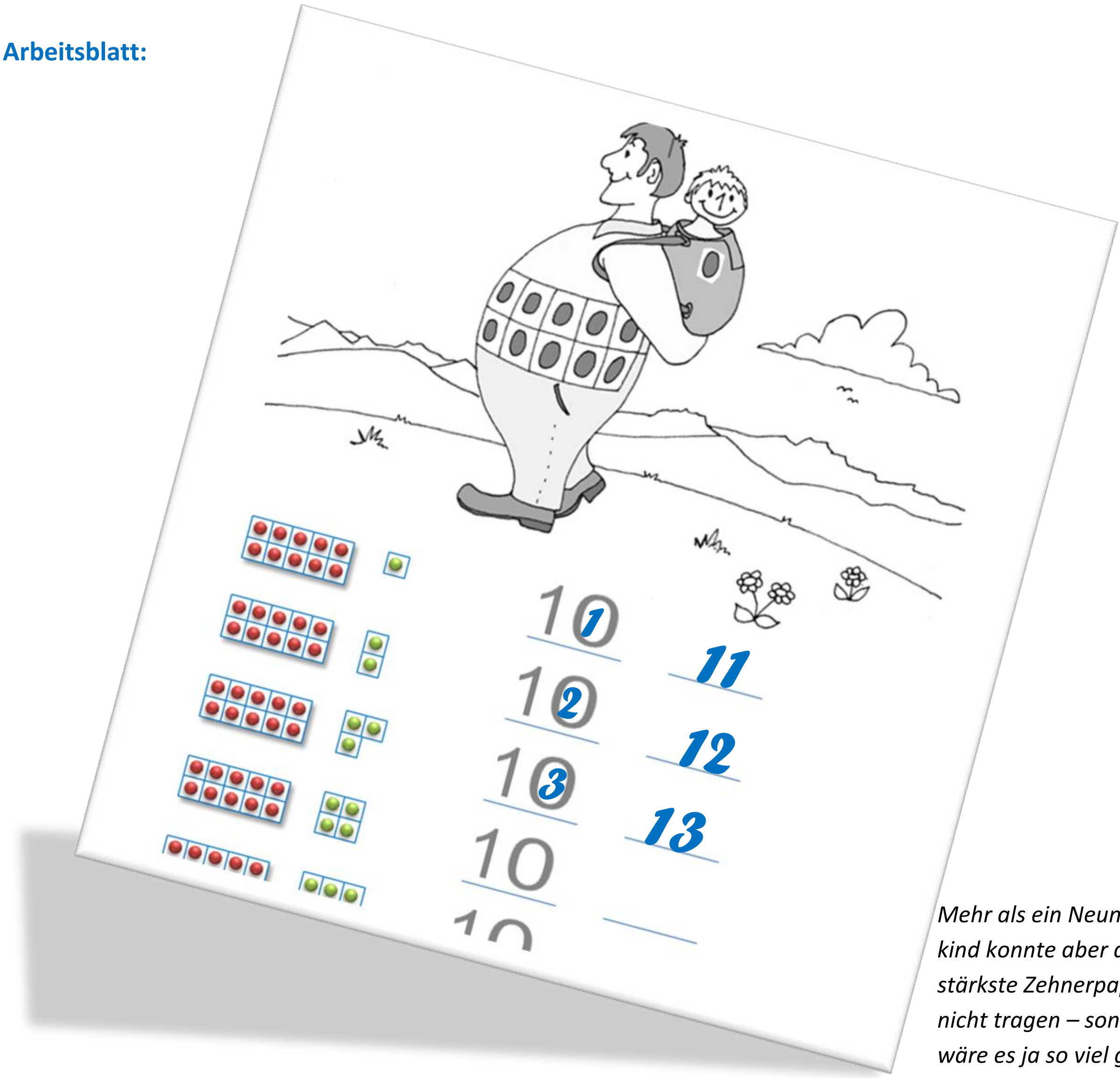
Die Zehnerkarte liegt jeweils unten. Es findet keine abstrakte Bündelung statt. Der Zehner ist in der Vorstellung des Kindes stets vorhanden, obwohl es sich mit der Stellenwertschreibweise unbemerkt vertraut macht. Wenn die Einerkarte entfernt wird, bleibt der Einer-Stellenwert richtigerweise Null und für das Kind bleibt gleichzeitig das vertraute Ziffernbild des Zehners.

Beim **Schreiben** der Zahlen soll anfangs noch der Gedanke an einen Rucksack präsent sein. Der 10er steht vorgegeben auf dem AB und das Kind löst das Problem indem es die Einer in die Null schreibt.
Später soll das Kind dann die ganze Zahl schreiben, sich den 10er aber immer mit der Null denken.



Arbeitsblatt:

AB 4.3



Mehr als ein Neunerkind konnte aber der stärkste Zehnerpapa nicht tragen – sonst wäre es ja so viel gewesen wie er selber.

B Leseart und Sprechweise der Zahlen 11 bis 19

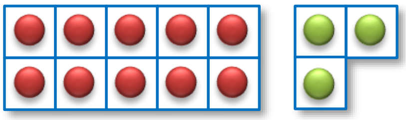
Auch hier soll eine Geschichte helfen, sich mit der inversen Leseweise der Zehner- und Einerstellen der Zahlen zurechtzufinden:

Im Feriencamp bei Dunkelwalden verbrachten 9 Familien ihre Ferien. Das Kind der ersten Familie hieß Eins, das Kind der zweiten Familie hieß Zwei, das Kind der dritten Familie hieß Drei, und das Kind der vierten Familie? Richtig, es hieß Vier! Und so ging das immer weiter und das Kind der neunten Familie schließlich hieß Neun.

„Heute machen wir einen Mama-Tag," sagten eines Tages die Mamas, als sie es satt hatten immer nur Würstchen zu braten, „Ihr Zehnerpapas macht jetzt mit den Kindern einen Ausflug zur Ruine Rumpelstein, damit wir Mamas endlich einmal Zeit zum Plaudern haben."

Den Zehnerpapas und den Kindern war das recht und so machten sie sich auf den Weg. Schon bald wurden die Kinder wieder müde und die Zehnerpapas mussten sie in ihren Rucksäcken tragen. Und als sie *bei der Jausenstation angelangt waren meinten auch die Zehnerpapas, dass sie jetzt ein wenig rasten müssten. Es dauerte nicht lange und die Zehnerpapas begannen Karten zu spielen und die Kinder spielten im Wald „Das tapfere Rotwittchen und die 8 Geißlein". Dabei verging die Zeit, ohne dass sie es bemerkt hätten.*

Als es Abend wurde und die Mamas nicht mehr wussten, über was sie plaudern sollen, und die Zehnerpapas und die Kinder immer noch nicht zurück waren, begannen sie sich Sorgen zu machen. Da gingen sie auf die Suche und jede Mama rief zuerst ihr Kind und dann den Zehnerpapa: „Vier! Zehn!" und „Fünf! Zehn!" oder „Acht! Zehn!". Die Mamas machten sich besonders Sorgen um die Kinder, weil diese kleiner und nicht so klug und stark waren wie die Zehnerpapas. Deshalb riefen sie die Kinder immer zuerst: „Drei! Zehn!" und so weiter.



„Drei! Zehn!"

Zum Glück kamen die Gesuchten schon bald angetrudelt. Aber, oh weh, es fehlten noch zwei Kinder und ihre Zehnerpapas! Der Eins und sein Zehnerpapa und die Zwei mit dem Zehnerpapa!

Da riefen sie alle „Eins! Zehn!" und „Zwei! Zehn!", aber niemand antwortete. Sie riefen immer wieder. Es dauerte ganz schön lange bis der Eins und sein Zehnerpapa auftauchten. „Tut uns leid, dass wir uns verspätet haben!", sagte der Zehnerpapa, „Aber als es so dunkel im Wald war, habe ich dem Eins die Geschichte von dem Elf, der im Wald wohnt, erzählen müssen." Wie war die Mama von Eins froh, dass Eins und Zehn wieder da waren. Und die Zwei und ihr Zehnerpapa kamen nun auch aus dem Wald. „Tut uns leid, dass wir uns verspätet haben!", sagte der Zehnerpapa von Zwei, „Aber als es so dunkel im Wald war, habe ich der Zwei die Geschichte von den Wölfen, die im Wald leben, erzählen müssen."

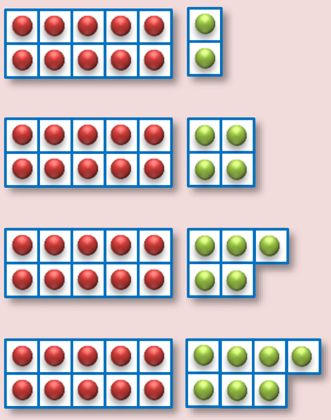
AB 4.2 ff

*Nun waren alle wieder froh und zum Spaßen aufgelegt. Deshalb nannten sie den Eins mit dem Zehnerpapa „**Elf**" wegen der Geschichte von dem Elf. Und die Zwei mit dem Zehnerpapa nannten sie „**Zwölf**" weil sie gerne Geschichten von Wölfen hörten.*

Beim Lesen der Zahlen gilt das Prinzip „Zuerst werden die Kinder genannt und dann die Zehnerpapas".

Abbildungen rechts:
Es empfiehlt sich beim Üben des Zahlenlesens **(c)**, die vorhergehenden Schritte mit der bildlichen Darstellung **(a)** und mit den Zahlenkärtchen **(b)** kurz zu wiederholen.

(a)



„Zwölf"

„Vierzehn"

„Fünfzehn"

„Siebzehn"

(b)

„Vierzehn"

„Elf"

„Zwölf"

„Dreizehn"

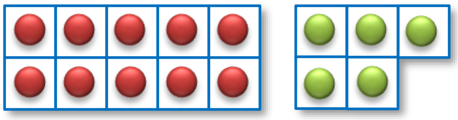
(c) 16 **„Sechzehn"**

C Rechnen im zweiten Zehner ohne Zehnerüberschreitung

1 Denken

Die Vorstellungen für das Rechnen im zweiten Zehner müssen für viele Kinder extra erarbeitet werden. Dabei soll von einer gegenständlich oder eventuell bildlich vorgegebenen Menge ausgegangen werden. Z. B.:

„Lege die Menge 15!“



„Jetzt stelle ich dir ein paar Rätsel.“

1) „Was ist, wenn ich 5 wegnehme?“
2) „Was ist, wenn ich 5 dazugebe? “ (Das Kind kann „zwei Zehner“ sagen, weil der Begriff „Zwanzig“ erst bei der Erarbeitung des ZR 100 eingeführt wird – siehe Seite 51.)
3) „Was ist, wenn ich 1 wegnehme? “
4) „Was ist, wenn ich 4 dazugebe? “
5) „Wie viel muss ich wegnehmen, wenn ich nur noch 12 will? “
6) „Wie viel muss ich dazugeben, wenn ich 17 will? “

Es besteht hier für manche Kinder die Gefahr der Überforderung, weshalb wieder drei Stufen zur Verinnerlichung berücksichtigt werden sollen:

a) Das Kind führt die Rätsel mit Legematerial handelnd aus.
b) Das Kind hat die Ausgangsmenge vor sich liegen und denkt sich, mit Blick auf das Legematerial, die Handlung nur noch.
c) Das Kind führt die Operation nur noch in der Vorstellung ohne direkte Anschauung durch.

Diese Rätsel sollen mit anderen Ausgangsmengen so oft wiederholt werden, bis sich das Kind ganz sicher ist.

2 Schreiben

Nun sollen die Rätsel im Geiste gelöst und aufgeschrieben werden. Dabei sollen stets mehrere Aufgaben von der *gleichen* Ausgangszahl gestellt werden:

„Du hast 15. Davon nehme ich 5 weg“

Notation: 15 – 5 = 10

„Du hast 15. Ich gebe 4 dazu.“

Notation: 15 + 4 = 19

usw.

Ein besonderer Fall:
„Du hast 10. Ich gebe 4 dazu.“
Notation: 10 + 4 = 14

Es ist für das Kind nicht unbedingt hilfreich, wenn bei der Addition die Menge 20 erreicht wird. Die Zahl 20 lernt das Kind dann bei der Erweiterung des Zahlenraumes auf 100. Falls das aber doch gewünscht wird, empfiehlt es sich, nicht „20“ zu schreiben, sondern „zwei Zehner“: 15 + 5 = 2 Zehner

3 Üben von einer Zahl aus

Die Angaben zur Rechnung erfolgen nur noch schriftlich. Legematerial oder Anschauungen können verwendet werden – Ziel ist jedoch, die Aufgaben zu lesen, allein in der Vorstellung zu lösen und das Ergebnis zu der Rechnung zu schreiben.

Es werden stets mehrere verschiedene Aufgaben mit der gleichen Ausgangsmenge gestellt.

Z. B.:

14 + 2 =	16 + 3 =
14 – 2 =	16 – 3 =
14 + 4 =	16 + 4 =
14 – 4 =	16 – 4 =
14 + 3 =	16 + 2 =
14 – 3 =	16 – 2 =
14 + __ = 15	16 + __ = 18
14 – __ = 12	16 – __ = 13

4 Gemischte Aufgaben

Auch hier kann bei Bedarf nach Schwierigkeitsgrad differenziert werden.

a) Ausgangszahlen gemischt, Plus- und Minusaufgaben getrennt:

12 + 5 =	11 – 1 =
14 + 3 =	19 – 7 =
13 + 4 =	15 – 2 =
11 + 2 =	17 – 3 =

b) Ausgangszahlen und Plus- und Minusaufgaben gemischt:

12 + 6 =	11 + 5 =
14 – 1 =	19 – 3 =
13 + 3 =	15 + 4 =
16 – 5 =	17 – 2 =

c) Nach Wunsch können Ergänzungen beigemischt werden:

15 + 2 =	12 + 3 =
14 – 2 =	16 – 5 =
11 + 4 =	18 + 1 =
14 – 3 =	19 – 4 =
13 + 5 =	17 + 2 =
17 – 3 =	15 – 4 =
13+ __ = 16	12 + __ = 18
	16 – __ = 13

Modul 5

Zehnerüberschreitung

Ziel:

Additionen über den Zehner im Kopf und halbschriftlich lösen können.

8 + 4 = ____	7 + 4 = ____	6 + 9 = ____
9 + 2 = ____	8 + 5 = ____	7 + 8 = ____
9 + 6 = ____	9 + 4 = ____	9 + 8 = ____
5 + 9 = ____	6 + 8 = ____	8 + 8 = ____
3 + 9 = ____	4 + 8 = ____	8 + 3 = ____
6 + 5 = ____	5 + 6 = ____	9 + 3 = ____
4 + 9 = ____	9 + 5 = ____	8 + 4 = ____
7 + 5 = ____	8 + 7 = ____	9 + 2 = ____
8 + 6 = ____	9 + 7 = ____	9 + 6 = ____
6 + 6 = ____	7 + 9 = ____	5 + 9 = ____
3 + 8 = ____	8 + 9 = ____	3 + 9 = ____
6 + 9 = ____	7 + 7 = ____	6 + 5 = ____
7 + 8 = ____	9 + 9 = ____	4 + 9 = ____
9 + 8 = ____	5 + 7 = ____	7 + 5 = ____
8 + 8 = ____	4 + 7 = ____	8 + 6 = ____

Modul 5: Zehnerüberschreitung

Es wird zu Beginn gleich besonders betont, darauf zu achten, dass das Kind stets „sicheren Boden unter den Füßen" hat. Das bedeutet bei der Zehnerüberschreitung, dass zunächst nur von der Zahl 9 das Prinzip des Rechnens über den Zehner erarbeitet und geübt wird, bis die Aufgaben sicher beherrscht werden – und dies stets die verinnerlichten Mengen-Zahl-Vorstellungen rekapitulierend.

a) Vorübungen

Da das sichere und flüssige Zerlegen von Mengen in Teilmengen für die Zehnerüberschreitung essentiell ist, soll im Vorfeld genau geprüft werden, ob bzw. welche Zerlegungen wiederholt werden müssen. Dabei ist darauf zu achten, dass das Kind über mehr Kenntnis verfügen muss, als nur die 10er-Freunde oder 6er-Freunde usw. automatisiert abrufen zu können. Es müssen im Geiste Mengenbilder zerlegt werden können. Das Kind muss sich mittels der verinnerlichten Bilder die Aktionen vorstellen können *<u>um deren Sinnhaftigkeit einsehen zu können</u>*.
Empfehlenswert ist, der Grundhaltung „alles vom ganz Leichten ausgehend aufzubauen" zu folgen. Da bei der Zehnerüberschreitung wiederum jede (Basis-)Zahl für sich in allen Kombinationen geübt werden soll (zuerst immer vom 9er ausgehend), sind Zerlegungen mit der fixen Teilmenge „1" eine hilfreiche Vorübung und gibt dem Kind Sicherheit:

2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 | 1	1 | 2	1 | 3	1 | 4	1 | 5	1 | 6	1 | 7	1 | 8	1 | 9

AB 5.1

b) Thematisieren der Zehnerüberschreitung durch Problemstellung

Durch eine Geschichte wird ein „realer" Rahmen für die Problembegegnung und die Problemlösung geschaffen. Beispielsweise:
„In der Schüssel liegen zwei Eier, die da nicht hingehören. Die Mama bittet Kathi, die Eier in die Eierschachtel zu legen. Aber in der Eierschachtel befinden sich schon 9 Eier, es hat nur noch 1 Ei Platz und 1 Ei bleibt übrig. Was soll Kathi da machen?"

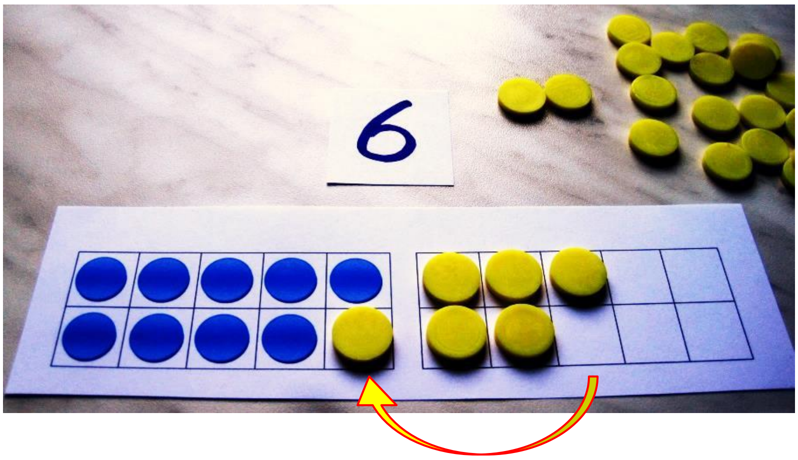
Lösen des Problems auf der handelnd-aktiven Ebene (Hantieren mit Mengen)

„Zum Glück liegt da noch eine leere Eierschachtel und Kathi kann das eine Ei in die zweite Schachtel legen."

Die Handlung wird besprochen: *„In der Eierschachtel sind neun Eier. Wir wollen noch zwei Eier dazugeben. Das geht aber nicht, weil nur noch ein Ei Platz hat. Wir brauchen eine neue Schachtel. Ein Ei muss in die neue Schachtel."*

Die Situation wird mit allen Mengen (2 bis 10 werden zu 9 dazugelegt) durchgespielt und viele Male wiederholt. Zur weiteren Vertiefung wird von den Eiern und den Schachteln auf die platzsparende Darstellung mit Legeplättchen und dem Zehnerraster gewechselt. Hier kann z.B. im Stationsbetrieb das zehnerüberschreitende Einordnen vorgegebener Mengen in den Zehnerraster geübt und verinnerlicht werden (Bild unten).

Die Arbeitsanweisung lautet: „*Ordne 6 Einer in die Eierschachteln ein*."



Wichtig ist, dass diese Übungen auch im Kopf gemacht werden müssen!

„Du hast die Eier (Plättchen) eingeordnet. Nun schließe die Augen und ordne 6 Eier (Plättchen) ein. Erzähle, was du da im Geiste (im Kopf) „siehst"!

AB 5.2 ff

Übertragen des Problems auf die begrifflich-abstrakte Ebene

1. **Schritt:** Verschriftlichung der Problem**stellung**

Wieder wird zum Übertritt in die höhere Ebene von Bekanntem und Leichtem ausgegangen und die eingangs erzählte Geschichte als Ausgangspunkt gewählt.

„Überlegen wir, was Mama in der Geschichte von Kathi wollte. Sie wollte, dass sie die 2 Eier zu den anderen 9 Eiern in die Eierschachteln einordnet. Das, was Mama wollte, können wir mit Zahlen und dem Pluszeichen aufschreiben:"

$$9 + 2$$

Nun ist mit dem einmaligen Ableiten der Verschriftlichung der Problemstellung noch nicht mit einer bleibenden Einsicht in den Vorgang der Verschriftlichung zu rechnen. Dieser Gedankengang von der „realen" Situation in eine begrifflich-abstrakte Darstellung ist ein wichtiger und geistig komplexer Schritt und muss deshalb mehrmals durchgespielt werden, bis er „sitzt":

„Wie müssten wir schreiben, wenn die Mama noch 4 Eier in der Schüssel gehabt hätte?"

$$9 + 4$$

$$9 + 3$$

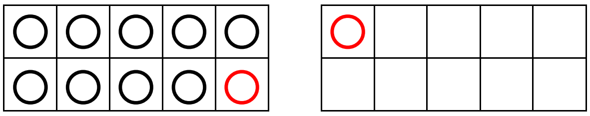
$$9 + 5$$

usw.

2. **Schritt:** Verschriftlichung der Problem**lösung**

„Wie könnten wir aufschreiben, was passiert, wenn Kathi die 2 Eier in die Kartons legt?“

AB 5.3 ff



$$9 + \underbrace{2}_{1\quad 1} = \underline{11}$$

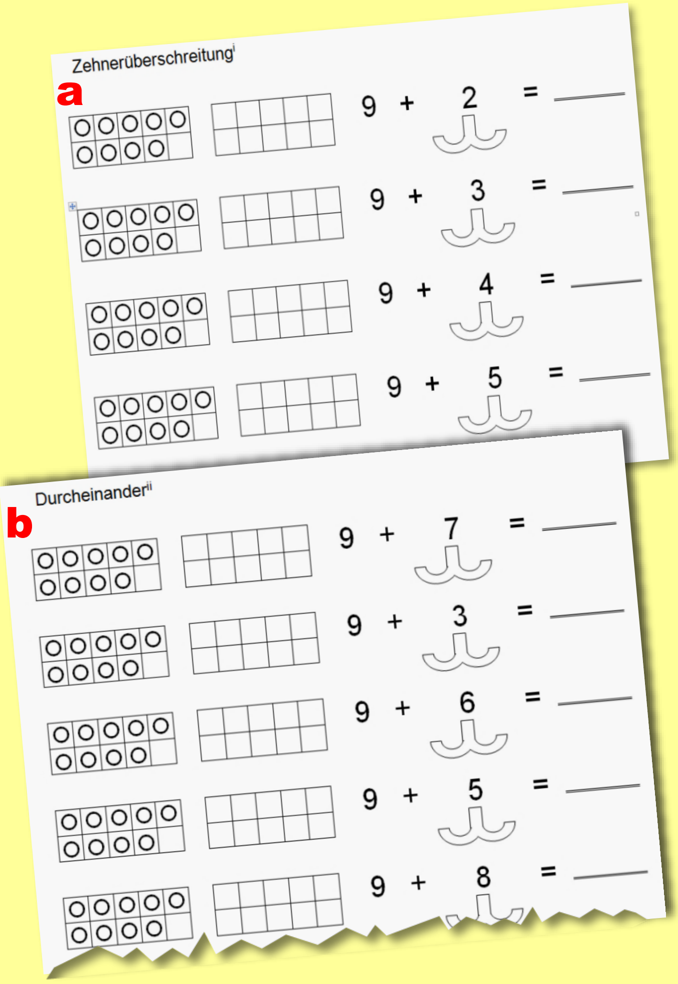
1. Schachtel! 2. Schachtel!

Es hat sich bewährt, zuerst in der bildlichen Darstellung zu zeichnen, wie das Problem handelnd gelöst wurde (Kreise in den Zehnerrastern) um dann die Lösung in der schriftlichen (teilbildlichen) Form niederzuschreiben. Dass dies eine Rechenoperation mit der Lösung 11 ist, ergibt sich mehr nebenbei. Im Vordergrund steht das Lesen der Problemstellung (9 + 2) und die Darstellung der Aufteilung des zweiten Summanden in Teilmengen. Der Bezug zu der Geschichte soll anfangs wiederholt hergestellt werden, damit auch wirklich klar ist, was hier symbolisiert wurde.

Besonderer Wert ist auf die Verbalisierung des Vorgangs durch das Kind zu legen. Möglichst knappe aber eindeutige Formulierungen sind für manche Kinder wichtig:

> *„Eines kommt zum Neuner, dann sind es Zehn, dann bleibt noch eines, zusammen sind es elf.“*

Eine schon bald eingeführte verkürzte Sprechweise kommt dem bildlich-mathematischen Denken entgegen: *„Eins – eins – elf!“* (9 + 2 =)

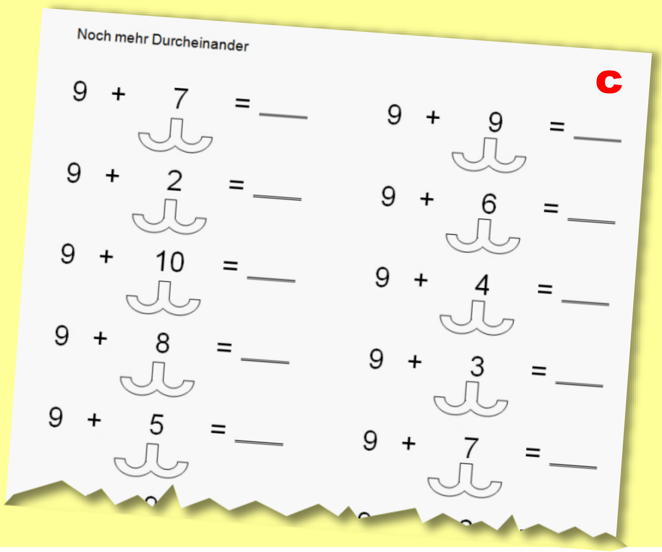


Schritte auf dem Weg zu höherer Abstraktion

(a) Im ersten Schritt werden die zu addierenden Zahlen aufsteigend geordnet und mit bildlicher Darstellung, wie oben beschrieben, angeboten.

(b) Im zweiten Schritt werden diese Aufgaben gemischt.

(c) Im dritten Schritt werden die Aufgaben gemischt und ohne bildliche Darstellung gelöst.



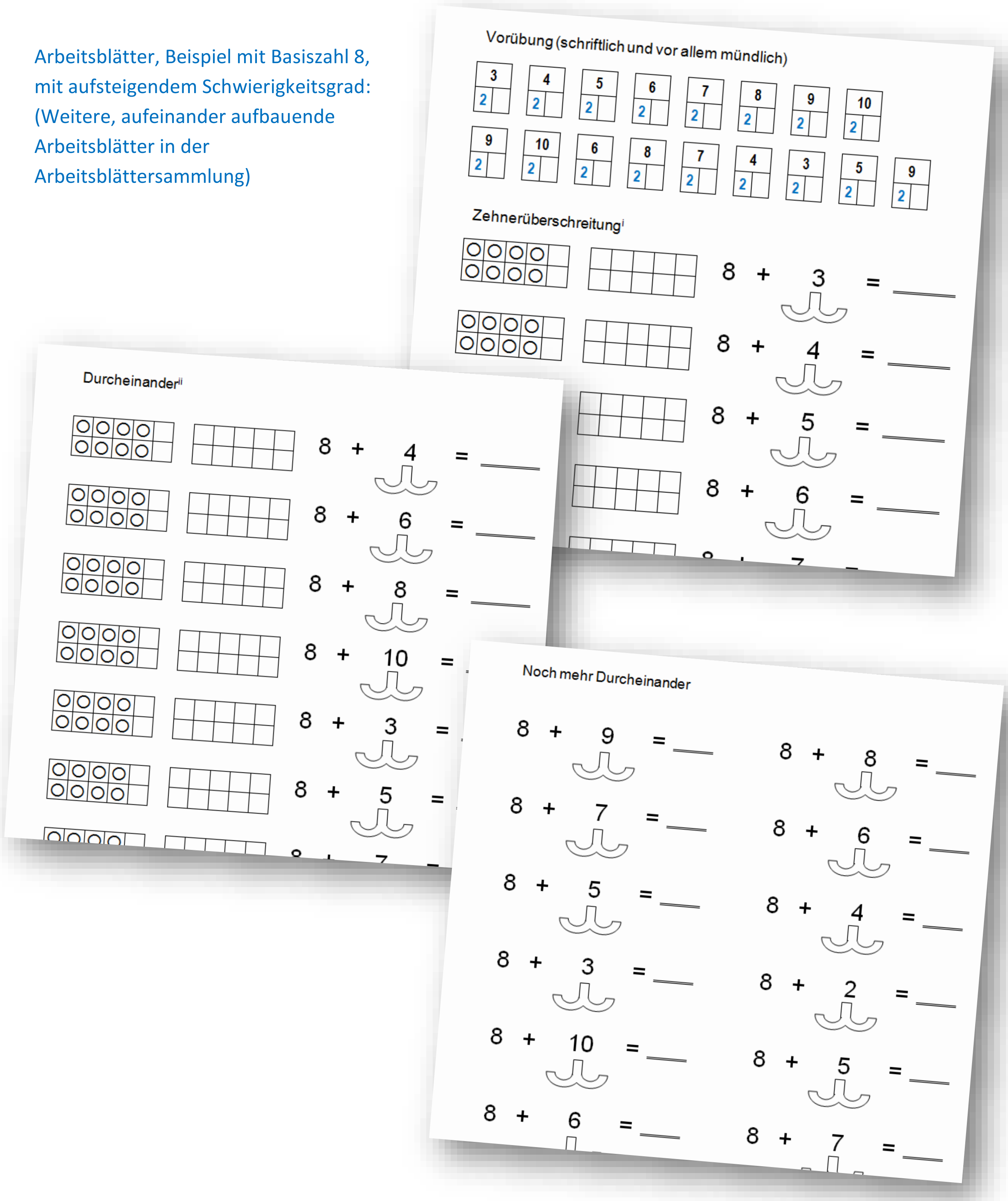
Erarbeitung der Zehnerüberschreitung mit den anderen Zahlen

Wenn die Zehnerüberschreitung von 9 als Basiszahl gut beherrscht wird, kann die Zehnerüberschreitung mit der Basiszahl 8 erarbeitet und eingeübt werden. Es ist ratsam, prinzipiell die Vorgangsweise wie bei 9 vorgestellt einzuhalten.
Ebenso soll bei den Mengen/Zahlen 7, 6, 5, 4, 3, und 2 vorgegangen werden, wobei allmählich der Arbeitsaufwand kleiner wird.

Durch das Lesen der Ergebnisse werden die Gedanken von Modul 4 zur Leseart und zur Vorstellung des Stellenwertsystems wiederholt und vertieft.

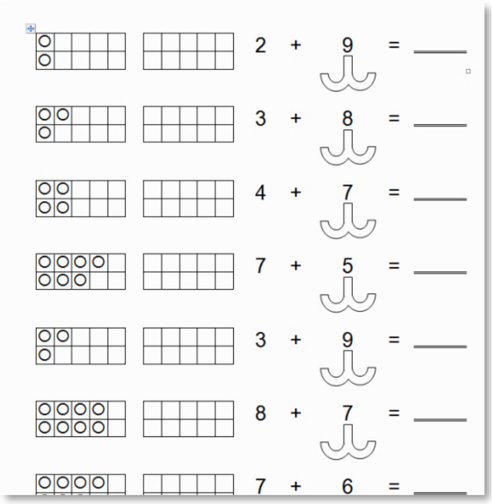
Arbeitsblätter, Beispiel mit Basiszahl 8, mit aufsteigendem Schwierigkeitsgrad: (Weitere, aufeinander aufbauende Arbeitsblätter in der Arbeitsblättersammlung)

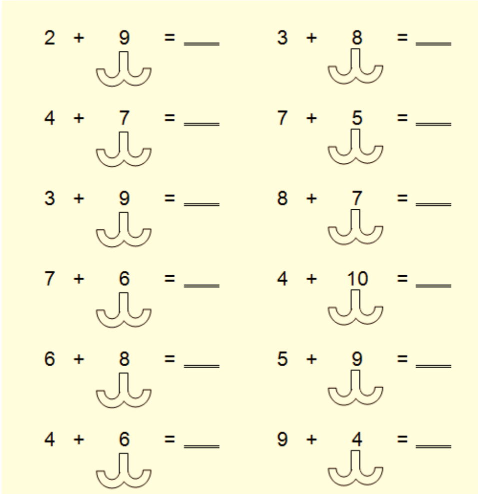
AB 5.3 ff



Einüben der Zehnerüberschreitung mit allen Zahlen

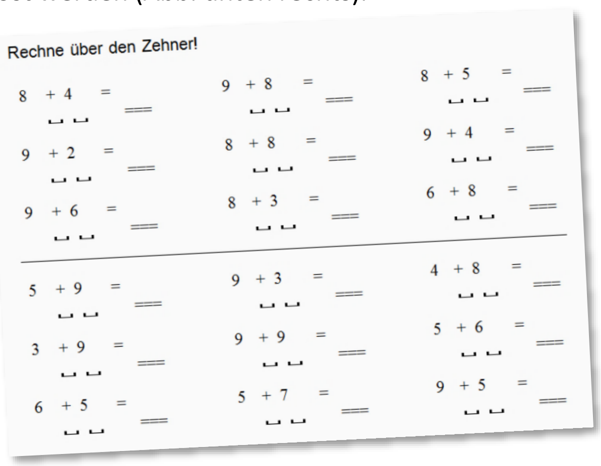
Nachdem mit allen Zahlen die Überschreitung des Zehners erarbeitet wurde, werden sämtliche Aufgaben gemischt geübt. Das Design wird zunächst noch beibehalten (Abb. unten).

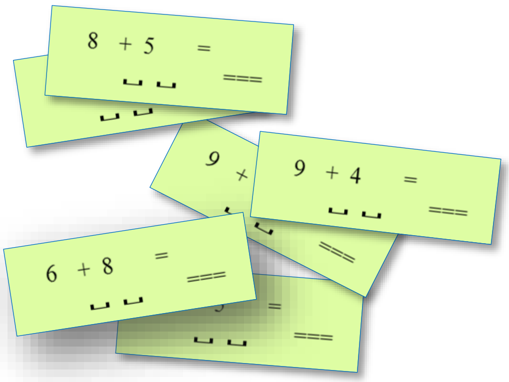




Im Folgenden werden die Teilmengen vorläufig noch auf die dafür vorgesehenen Stellen notiert (Abb. unten links), später nur noch mündlich erwähnt. Mit fortschreitender Verinnerlichung kann allmählich darauf verzichtet werden. Dass mit steigender Geläufigkeit auch die Zahl der Aufgaben zunimmt, stellt keine Belastung für die Kinder dar, weil sie die Aufgaben mit Leichtigkeit lösen können. Für hochfrequentes Üben kommen an dieser Stelle die Rechenkärtchen zur Anwendung, die nur noch im Kopf gelöst werden (Abb. unten rechts).

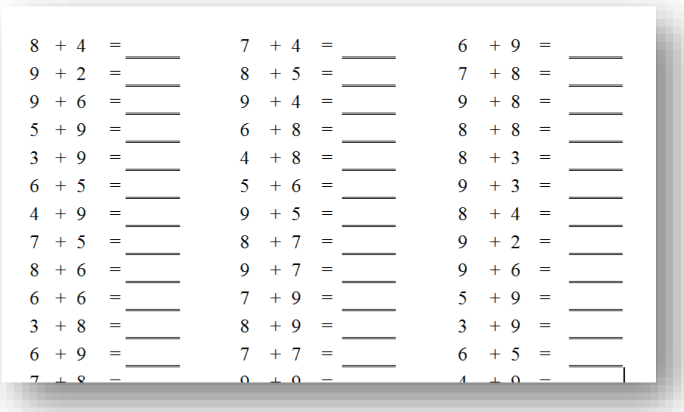
AB 5.4 ff





Nun können die Kinder Arbeitsblätter mit sehr vielen Aufgaben in kürzester Zeit lösen ohne dabei überfordert zu sein. Das Ziel der Zehnerüberschreitung ist erreicht.

AB 5.5 ff



Modul 6

Zehnerunterschreitung

Ziele:

1) Subtraktionen über den Zehner im Kopf und halbschriftlich lösen können.

2) Additionen u. Subtraktionen gemischt über den Zehner im Kopf und halbschriftlich lösen können.

16 – 9 = ______
11 – 4 = ______
17 – 10 = ______
11 – 6 = ______
11 – 8 = ______
16 – 10 = ______
11 – 2 = ______
17 – 9 = ______
11 – 9 = ______
15 – 9 = ______
16 – 10 = ______
11 – 10 = ______
17 – 9 = ______

16 – 9 = ______
4 + 9 = ______
16 – 10 = ______
9 + 8 = ______
11 – 6 = ______
5 + 9 = ______
11 – 2 = ______
6 + 8 = ______

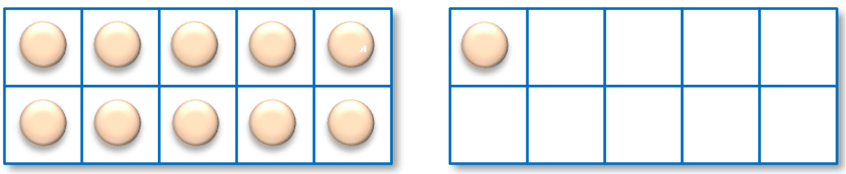
Modul 6: Zehnerunterschreitung

Auch bei der Einführung der Unterschreitung des Zehners wird die Grundhandlung der Rechenoperation auf den Erfahrungen des Kindes gegründet. Es ist wichtig, dass das Kind Sicherheit im Tun und Denken hat. Deshalb wird die Zehnerunterschreitung zuerst nur von der Zahl 11 ausgehend erarbeitet und eingeübt.

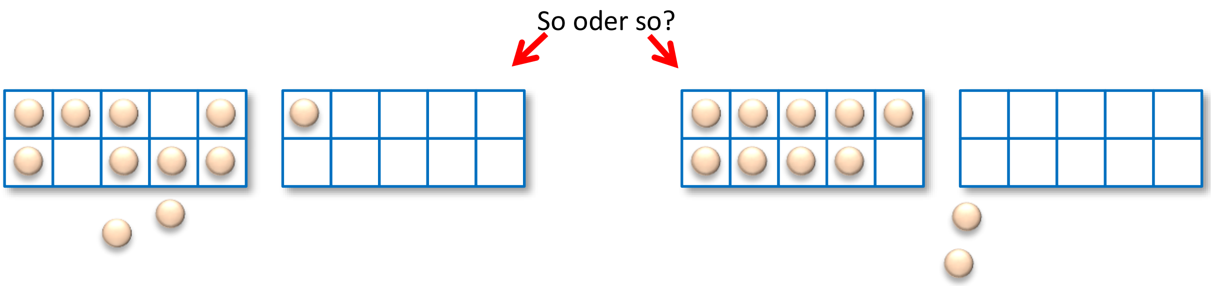
Handelnd-aktiven Ebene

Zunächst muss aber die Form des Wegnehmens erarbeitet werden, damit die Struktur des Anschauungsmaterials zu den bereits verinnerlichten Mengenbildern passt – d. h. es muss an der richtigen Stelle etwas weggenommen werden.

Problemstellung: *„Mama hat noch 11 Eier im Kühlschrank. Für Flädle braucht sie jetzt 2 Eier. Welche sollen wir aus den beiden Eierschachteln herausnehmen*?*“*



Es gibt verschiedene Möglichkeiten, welche Eier herausgenommen werden (z.B. Abbildung unten links). Meist kommt der gewünschte Vorschlag spontan von den Kindern; zumindest sind sie für den plausiblen Vorschlag, den einen Karton zuerst zu leeren, empfänglich, weil da weniger Platz im Kühlschrank verbraucht wird (Abbildung unten rechts).



Der Gedanke der Zehnerunterschreitung ist geboren, sobald sich das Kind für die oben rechts dargestellte Möglichkeit entscheidet. Zahlen und Rechenergebnisse spielen hier noch gar keine Rolle. Wichtig ist nur, dass vereinbart wird, dass strikt zuerst aus der zweiten Schachtel alle Eier herausgenommen werden und dann die noch fehlenden von rechts beginnend aus der ersten Eierschachtel. Dazu spricht das Kind: *„Das eine Ei nehme ich aus der zweiten Schachtel und eines aus der vollen Zehnerschachtel.“*

Auch bei der Zehnerunterschreitung werden handelnd von der Anzahl 11 alle möglichen „Subtrahenden“ weggenommen.

Sehr wichtig ist das Durchführen der Operation vor dem geistigen Auge
und das Verbalisieren des Vorgestellten.

Anschließend erfolgen die gleichen Handlungen mit den Basiszahlen 12, 13, 14 usw., wobei bei begabten Kindern der Vorgang weniger konsequent eingehalten werden muss (Aber Vorsicht! Eine Unterforderung ist hier weniger schlimm als eine Überforderung!).

Übertragen des Vorgangs auf die begrifflich-abstrakte Ebene

1. **Schritt:** Verschriftlichung der Problem**stellung**

Nach dem Einüben des „systematischen Wegnehmens“ folgt die Verschriftlichung der Handlungen. Wie bei der Zehnerüberschreitung soll auch hier nur die Handlung mittels Symbolen ausgedrückt werden. Das Gedachte wird verbal formuliert und schriftlich festgehalten.

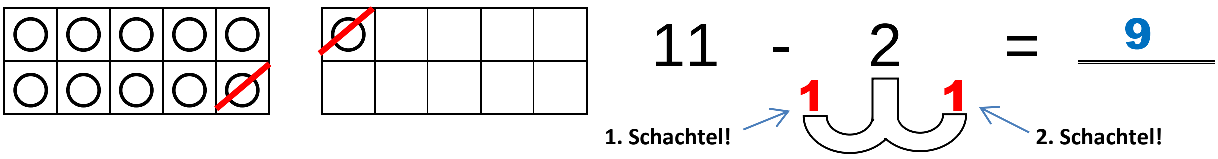
$$11 - 2$$

$$11 - 5$$

$$11 - 7$$

2. **Schritt:** Verschriftlichung der Problem**lösung**

Dem Lösen der schriftlich ausgedrückten Subtraktion geht auch hier der Umgang mit der bildlichen Darstellung voraus. Die Zerlegung in die Teilmengen wird ebenfalls in Ziffern niedergeschrieben. Das Ergebnis zu finden stellt i. d. R. kein Problem dar, da die Kinder die Ergebnisse der Operationen schon auf der handelnd-aktiven Ebene gerne genannt haben und sich damit auseinandergesetzt haben.



AB 6.1 ff

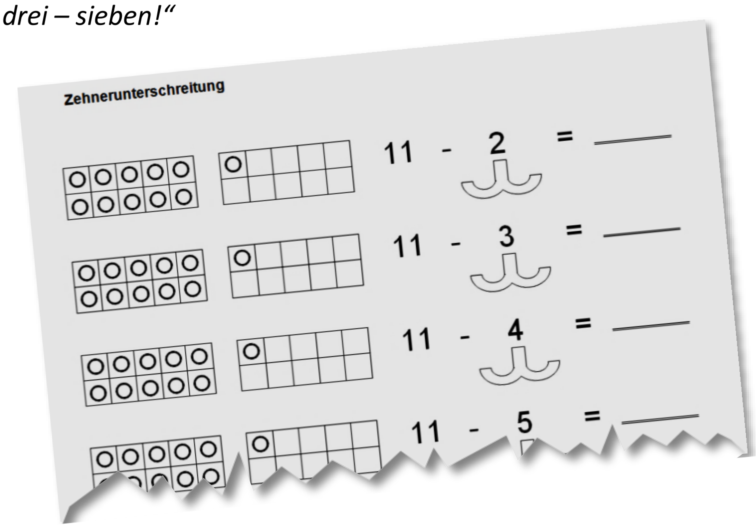
Besonderer Wert ist auf die Verbalisierung des Vorgangs durch das Kind zu legen. Möglichst knappe aber eindeutige Formulierungen sind für manche Kinder wichtig:

„Eines nehme ich aus der zweiten Schachtel und eines aus der vollen Zehnerschachtel, dann bleiben noch neun.“

Eine schon bald eingeführte verkürzte Sprechweise erleichtert das bildlich-mathematische Denken:
Z. B. für die Aufgabe 12 – 5 = : *„Zwei– drei – sieben!“*

Auf dem Weg zur höheren Abstraktion werden die gleichen Schritte durchgeführt, wie bereits bei der Zehnerüberschreitung auf Seite 41 beschrieben.

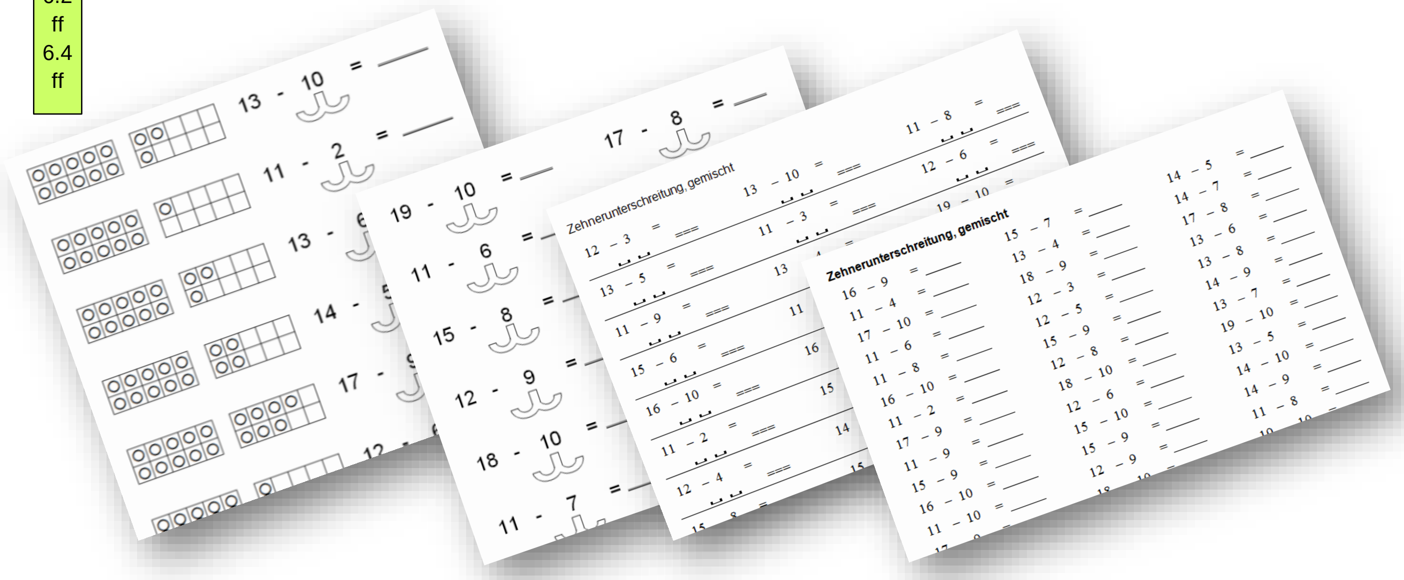
Arbeitsblatt, Beispiel:
(Weitere, aufeinander aufbauende Arbeitsblätter in der Arbeitsblättersammlung)



Einüben der Zehnerunterschreitung mit allen Zahlen

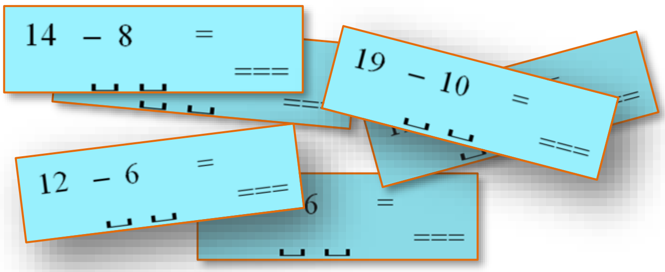
Sind alle Minuenden 11 bis 19 der Zehnerunterschreitung erarbeitet, dann werden sämtliche Aufgaben durchmischt geübt. Auch hier wird noch einmal von der anschaulichen Darstellung ausgegangen. Wie bei der Zehnerüberschreitung erfolgt ein schrittweiser Übergang zur endgültigen Form der Verschriftlichung (Abb. unten, Abfolge von links nach rechts).

AB 6.2 ff 6.4 ff



AB 6.3 ff

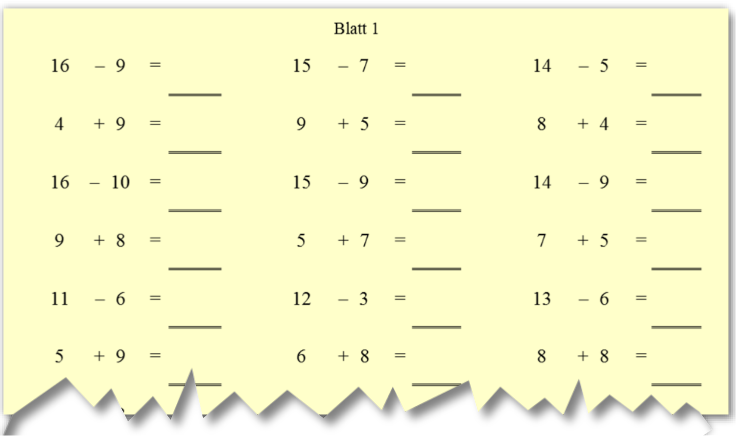
Rechenkärtchen dienen dem hochfrequenten Einüben, wobei die Aufgaben bereits im Kopf gelöst werden müssen (nebenstehende Abb.).



Rechnen über den Zehner mit allen Zahlen

Am Ende dieses Moduls rechnen nun die Kinder alle Aufgaben der Zehnerüberschreitung und -unterschreitung durchmischt auf Arbeitsblättern, mit den Kärtchen oder einfach im Kopf. Stets soll dabei auf eine möglichst hochfrequente und zeitnutzende Art des Übens geachtet werden.

AB 6.5 ff



Blatt 1

16 – 9 =	15 – 7 =	14 – 5 =
4 + 9 =	9 + 5 =	8 + 4 =
16 – 10 =	15 – 9 =	14 – 9 =
9 + 8 =	5 + 7 =	7 + 5 =
11 – 6 =	12 – 3 =	13 – 6 =
5 + 9 =	6 + 8 =	8 + 8 =

Modul 7

Zahlenraum 100

Ziele:

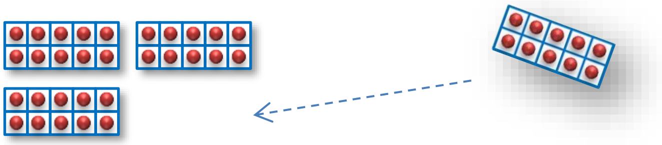
- **Sich im Geiste Mengenbilder bis 100 und die mit ihnen verknüpften Zahlen vorstellen können.**
- **Zahlen bis 100 lesen und schreiben können.**
- **Reine Zehner in Zehner zerlegen können.**
- **Jede Zahl des ZR 100 auf den nächsten reinen Zehner in Gedanken ergänzen können.**

Nicht selten verwechseln Kinder Zahlen des zweiten Zehners z.B. siebzehn mit dem ähnlich klingenden reinen Zehner siebzig. Solch unscheinbare, aber nichtgeklärte Begrifflichkeiten sind hemmende Faktoren. Es ist daher wichtig, im Zuge der Einführung des ZR 100 darauf besonders einzugehen.
Bei der Anordnung der Zehner im ZR 100 wird die **gleiche Struktur wie bei den Mengenbildern 1 bis 10** eingehalten.

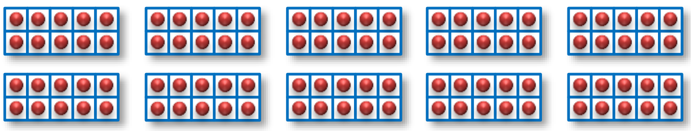
1. Schritt: Legen der Zehner bis 100 und deren Anordnung

Die Lehrperson legt der Reihe nach Zehnerkärtchen und spricht dazu:

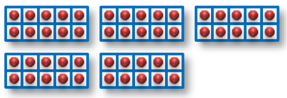
AB 4.2B



„1 Zehner, 2 Zehner, 3 Zehner, …“, und schon bald werden die Kinder bis „10 Zehner“ mitzählen.



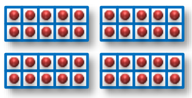
Nun sollen die Kinder „Zehnermengenbilder“ legen. Ein Kind beginnt und legt z. B. 5 Zehner in der vom ZR 10 bekannten Anordnung:



Darauf fordert das Kind ein anderes Kind auf, eine andere Menge von Zehnern zu legen usw. bis allen Kindern das Legen von Zehnern in der bekannten Anordnung der Einer vertraut ist.

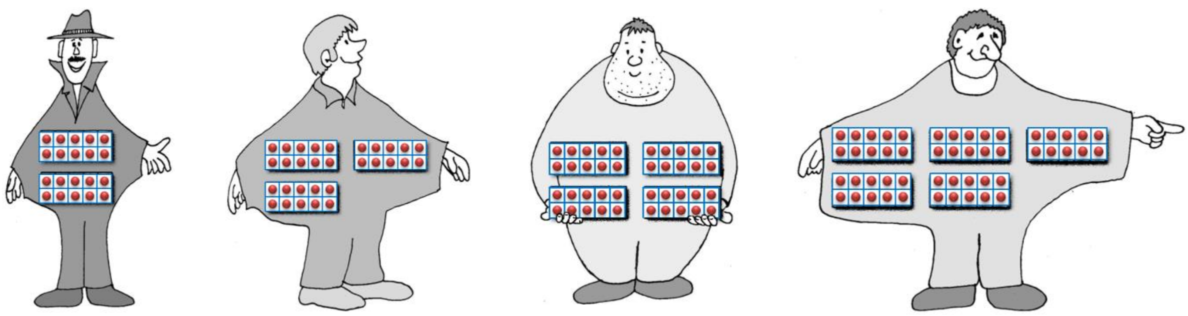
2. Schritt: Benennen der Zehner

Besonders für Kinder mit erschwerenden Voraussetzungen ist auch hier die Personifizierung und ein Anknüpfen an die Geschichten vom Zehnerpapa und den Einerkindern hilfreich. Wichtig ist, dass das Kind weiß, dass die Silbe „zig“ („ßig“) „zehn“ bedeutet und dass das Kind damit das oben eingeübte Bild verknüpft: „vier**zig**“ sind „vier **Zehner**“.



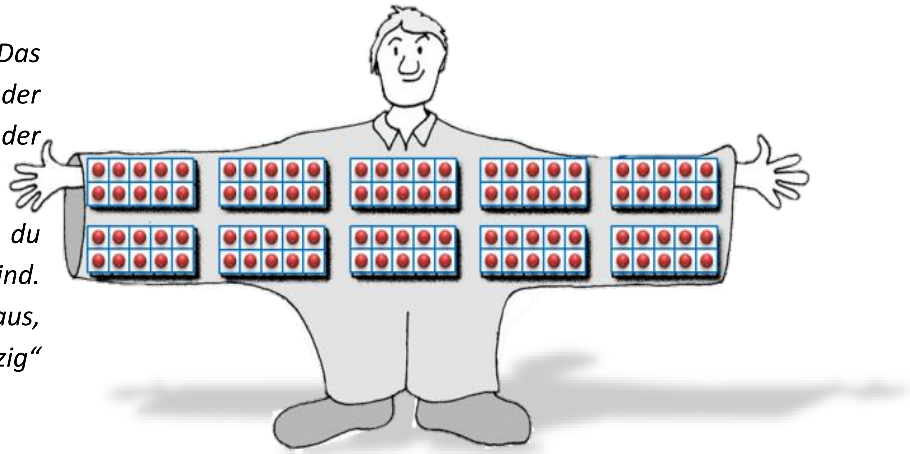
Der Zehnerpapa hatte noch neun größere Brüder. Das waren nämlich die Onkel der Einerkinder. Die Onkel hießen Zwei-Zehner, Drei-Zehner, Vier-Zehner, und der letzte hieß Zehn-Zehner.*

AB 7.1



*) Die Forderung nach einem angemessenen Frauenanteil wird hier nicht erfüllt, denn es heißt ja „der Einer“, „der Zehner“, „der Hunderter“ und „der Tausender“.

Aber weil ihnen diese Namen zu lang waren, wollten sie abgekürzte Namen, so wie man das auch bei vielen Namen macht, die wir kennen (z.B. Alex, Susi, usw.). Und so sind sie auf die Idee gekommen, dass sie statt „Zehner" einfach „zig" sagen.
„Das probieren wir gleich einmal aus", sagten sie. „Also: Einzig, Zweizig, Dreizig, …, Zehnzig".
„Nein, nein", sagte der Zehnerpapa. „Einzig will ich nicht heißen. Nennt mich einfach Zehn!"
„Und ich finde Zwanzig cooler", meinte der Onkel Zwei-Zehner.
Auch der Onkel Drei-Zehner hatte einen Einwand und sagte: „Mich sollt ihr bitte Dreißig nennen."
„Gut", sagte der Onkel Fünfzig, „dann hätten wir da Zehn, Zwanzig und Dreißig. Will noch jemand einen anderen Namen?"
„Hundert, ich will Hundert heißen. Das klingt so richtig nach viel!" rief der Onkel Zehn-Zehner. „Ich bin ja auch der Größte von uns."



Also, wenn du „zig" hörst, weißt du gleich, dass es mehrere Zehner sind. Wie viele es sind, findest du heraus, wenn du auf das hörst, was vor „zig" kommt.

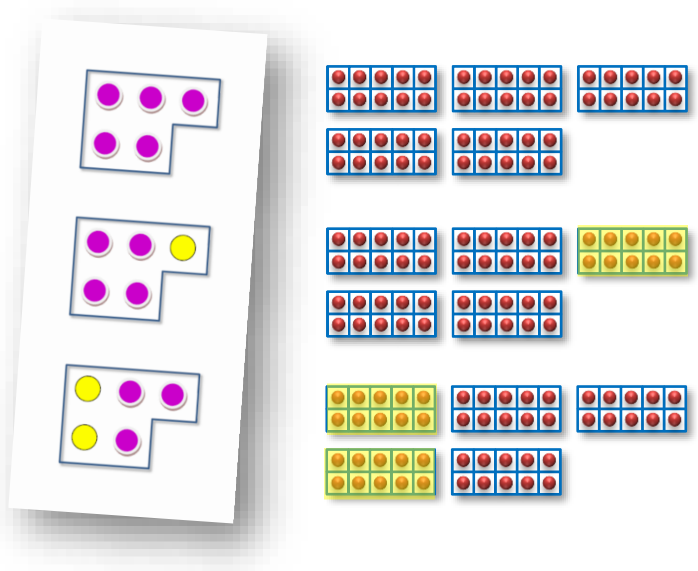
Hier wird auch die Schreibweise analog zum Zehnerpapa eingeführt: Wir schreiben nicht nur 1 Zehner: **1**0, sondern auch 2 Zehner: **2**0 „Zwanzig", 3 Zehner: **3**0 „Dreißig", … 10 Zehner: **10**0 „Hundert".

3. Schritt: Verinnerlichen durch Umgang mit reinen Zehnern

Es werden nun Zehner-Anzahlen genauso zerlegt, wie es die Kinder vom Umgang mit den Einern kennen. Es kann für manche hilfreich sein, anfangs die Zerlegemappe daneben auf den Arbeitsplatz zu legen. Wichtig ist, auf der Stufe der handelnden/bildlichen Aufarbeitung ausreichend lange zu verweilen ehe die Zerlegetürme eingeführt werden.

Zum Beispiel 50:

Handelnd/bildliche Aufarbeitung



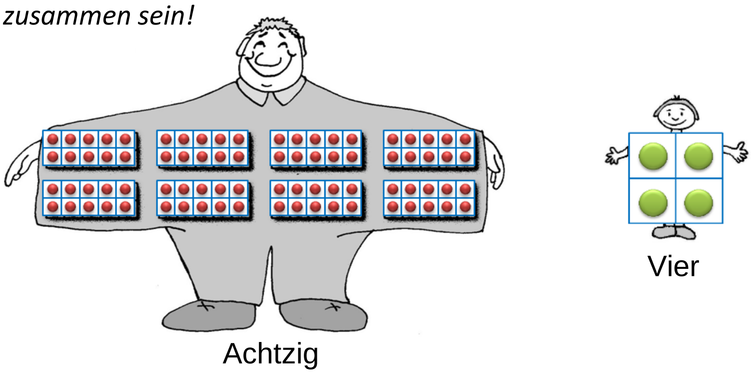
Symbolisch/abstrakte Aufarbeitung mit Zerlegetürmen

50	
10	
50	
20	
40	
0	
30	

4. Schritt: Einführen und Lesen von gemischten Zehnern

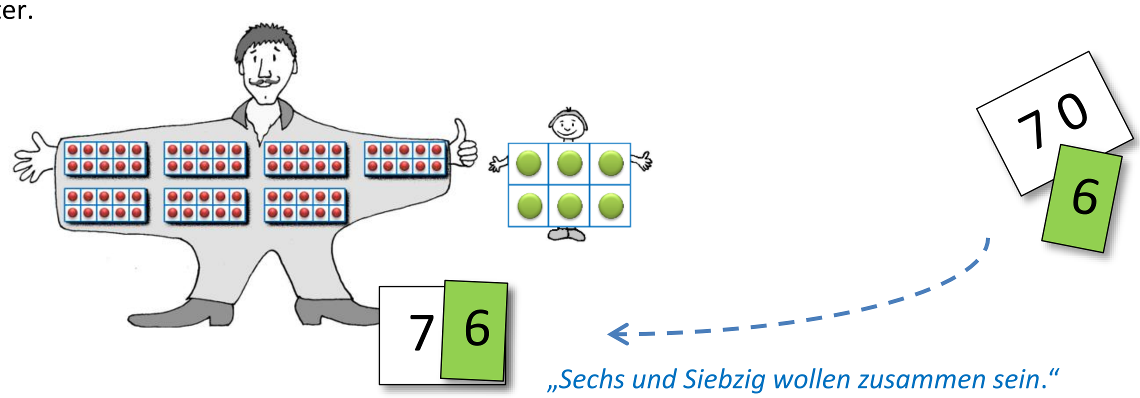
Nun wird szenisch bzw. personifiziert die Grundlage für das Stellenwertverständnis im ZR 100 gelegt.

Wie die Zehnerpapas haben auch die Zehneronkel die Einerkinder gern. Oft besuchen die Kinder ihre Onkel und dürfen dann in ihre Rucksäcke sitzen. Sieh einmal an, wer will denn da zusammen sein? Vier und Achzig wollen zusammen sein!



Neu ist in der Leseart das Wort „und“. Die Leseart kann durch die Frage „*Wer will denn da zusammen sein?*“ leicht evoziert werden. Dass die Einerkinder zuerst genannt werden, ist von der Geschichte mit den Zehnerpapas bekannt. Die Kinder legen nun möglichst viele Zehneronkel und Einerkinder kombiniert zusammen, benennen sie und legen die passenden Namenskärtchen (Zahlenkärtchen) darunter.

AB 7.2



„Sechs und Siebzig wollen zusammen sein.“

Oder bald vereinfacht nur: *„Sechsundsiebzig“*

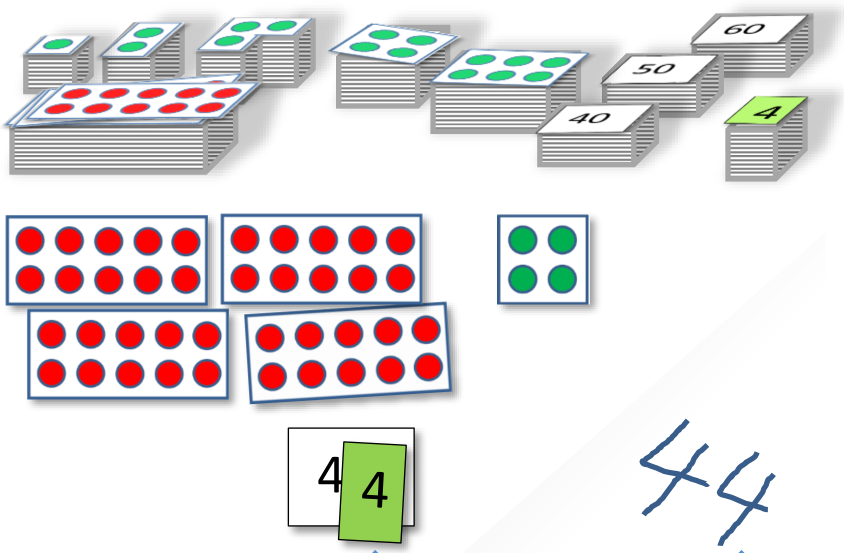
5. Schritt: Legen, lesen und schreiben der gemischten Zehner ohne Personifizierung

Es liegen ausreichend Zehnerbildkärtchen, alle Einerbildkärtchen sowie die Zehner- und Einerziffernkarten bereit (siehe www.merkmal.info: Arbeitsvorschläge Nr. 1).

a) Das Kind legt z.B. 4 Zehnerbildkärtchen und 4 Einerbildkärtchen und benennt das Gelegte: „*Vierundvierzig*!“

b) Das Kind legt die Ziffernkarten dazu und liest die Zahl.

c) Anschließend wird die Zahl aufgeschrieben.

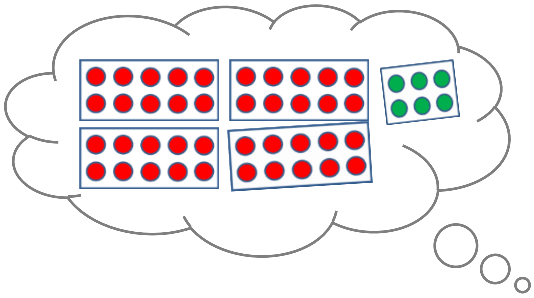


immer denken: vier sind in dem Rucksack - vierundvierzig

6. Schritt: Verinnerlichen der Mengen-Zahl-Verknüpfungen

Um den klassischen Lerntypen (visueller, auditiver, haptischer, kinästhetischer Lerntyp) gerecht zu werden, wird das Decodieren von verbal genannten Zahlen bzw. ihrer Notation in die verinnerlichten Mengendarstellungen entsprechend geübt. Dabei wird das Stellenwertsystem auch gestikulierend vertieft und gefestigt.

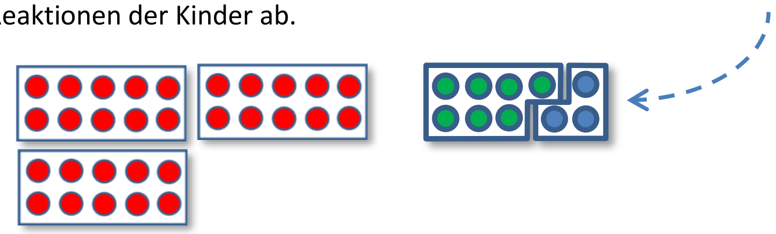
E i n l e i t u n g : *„Wir können uns im Kopf Dinge vorstellen, die man gerade nicht sieht. Stellen wir uns vor, wir sitzen im Auto – auf welcher Seite ist das Lenkrad und auf welcher Seite ist das Handschuhfach?* (Augen zu und mit der linken Hand die Lenkerseite und mit der rechten Hand die Beifahrerseite andeuten!) *Und so können wir uns die Legeplättchen vorstellen, wenn wir eine Zahl hören. Was siehst du, wenn ich sechsundvierzig sage?“*



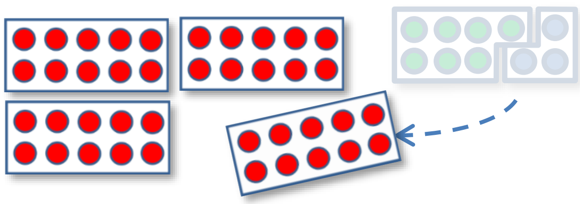
Nun wird der vorige 5. Schritt nur noch im Geiste und, um die räumliche Situation des Stellenwertsystems mental möglichst breit zu verankern, zusätzlich durch Gesten unterstützt durchgeführt. Wenn z.B. die Zahl 46 genannt wird, soll durch Gesten das Legen der Mengenkärtchen simuliert werden. Zu empfehlen ist anfänglich mit den Fingern auf der Arbeitsfläche auf die imaginären Zehner und Einer zu tippen. Dabei wird **mit allen Fingern der linken Hand auf die „Zehnerstelle“** getippt und **nur mit dem Zeigefinger der rechten Hand auf die „Einstelle**“. Später werden mit großzügigen Gesten in der Luft mit der linken Hand die Position der Zehner und mit der rechten Hand die Postition der Einer bezeichnet und dazu gesprochen: *„Bei Sechsundvierzig sind hier vier Zehner und hier sind sechs Einer.“*

7. Schritt: Bündeln von Einern zu einem Zehner und Ergänzen auf den nächstgrößeren Zehner

Anhand von Legematerial wird die Idee und die Handlung des Bündelns eingeführt. Dazu wird eine Zahl, z.B. 37, mit Legematerial dargestellt. Nun legt die Lehrperson zu den 7 Einern noch 3 Einer dazu und wartet die Reaktionen der Kinder ab.



Die Diskussion sollte sinngemäß ergeben, dass nicht mehr als 9 in den Rucksack des Zehneronkels passen, weil dann die 10 Einer selber 1 Zehner sind.
Aber was soll geschehen, wenn trotzdem 3 Einer zu den 7 Einern kommen? – Nun wird auf die Einsicht hingearbeitet, dass die Einer jetzt selber ein Zehner sind und dass sie daher zu den Zehnern gehören.



In der Folge werden etliche dieser Beispiele gelegt und die Kinder ergänzen selber auf den ganzen Zehner.

Den Abschluss dieses Moduls bildet das Ergänzen (und Bündeln) rein verbal vor dem geistigen Auge: *„Wie viel fehlen bei 82, damit die Einer zu den Zehnern dürfen? – Wie viele Zehner sind es dann?“*

Modul 8

Addition und Subtraktion im ZR 100

Ziele:

- **Additionen und Subtraktionen mit Zehnerüberschreitung bzw. Zehnerunterschreitung im ZR 100 im Kopf durchführen können.**

L 27a

7	+	25	=
34	-	27	=
26	+	59	=
28	-	16	=
35	+	19	=
42	-	34	=
49	+	43	=
56	-	27	=
63	+	28	=

Voraussetzung für diesen Lernschritt ist das mühelose Vorstellen der Mengenbilder von 0 bis 100 und die damit sicher verknüpften Ziffernnotationen.

Das Rechnen im ZR 100 wird in kleinen aufeinander aufbauenden Schritten erlernt, die hier in Anlehnung an PC-Spiele „Levels“ genannt werden. Jeder Level besteht aus neun Aufgaben, die auf kleinen (Einweg-)Kärtchen notiert sind. Die Aufgaben werden von den Kindern auf diesen Kärtchen gelöst. Kärtchen und Sortierfächer können aus der Arbeitsblättersammlung ausgedruckt werden.

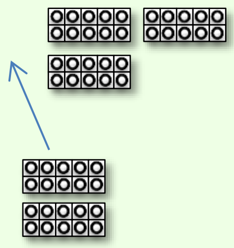
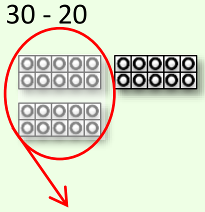
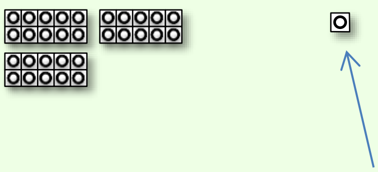
Die Kinder arbeiten sich selbständig durch die Levels durch, müssen dabei aber *drei Regeln* befolgen: 1.) Es werden keine Levels ausgelassen; 2.) Die ersten drei (zwei) Rechnungen jedes Levels werden mit Material gelegt und die Handlung verbalisiert; 3.) Ein Level ist erst dann abgeschlossen, wenn sich die Lehrperson davon überzeugt hat, dass die Aufgaben beherrscht werden.

Das Legen des Anschauungsmaterials ist für das Kind zwar unangenehm leicht, gibt jedoch der Lehrperson wichtigen Aufschluss darüber, wie das Kind beim Lösen der Aufgaben denkt. In dieser Phase verfügt das Kind schon über den größten Teil der inneren Anschauungen mit denen es die Notation der Aufgaben problemlos und schnell interpretieren kann. Aufgabenstellungen und Arbeiten geschehen daher vornehmlich anhand der mathematischen Notation (weil das rationeller ist) und gleichen äußerlich dem traditionellen Mathematikunterricht (nicht jedoch innerlich, ist zu hoffen).

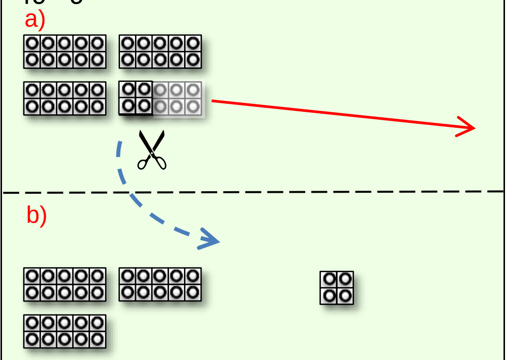
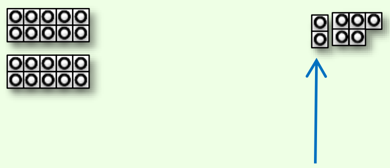
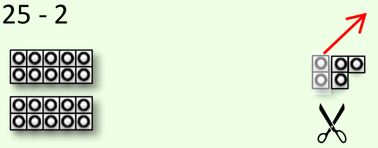
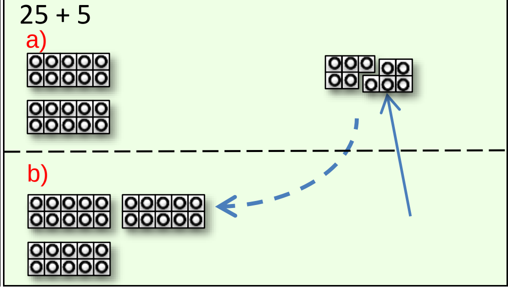
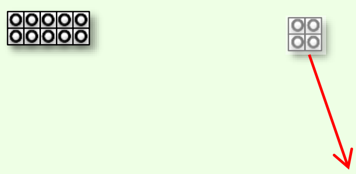
Tabelle: Übersicht und Erklärung der Levels

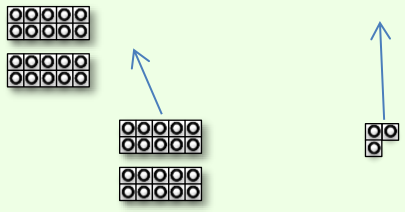
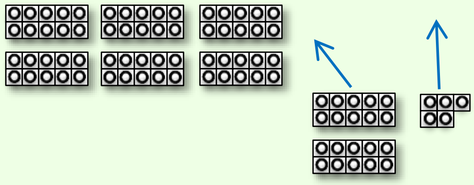
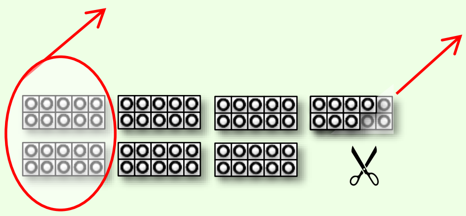
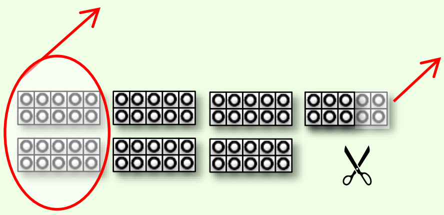
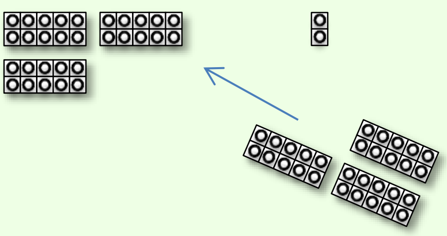
AB 8.1 ff

AB 8.2 ff

Aufgabenkärtchen	Legebeispiele	Bemerkungen
L1 Zu reinen Zehnern reine Zehner addieren.		
30 + 20 = 40 + 30 = 10 + 50 = 50 + 20 = 20 + 80 = 60 + 30 = 80 + 10 = 70 + 20 = 90 + 10 =	30 + 20 	Analogie zu den Zerlegungen im ZR 10 beachten! Das Zerlegen bzw. das Wiederzusammensetzen der Mengenbilder im ZR 10 erfolgte unabhängig von der Schreibrichtung und wird auch hier so gehandhabt.
L2 Von reinen Zehnern reine Zehner subtrahieren.		
30 - 20 = 40 - 30 = 80 - 50 = 50 - 20 = 20 - 10 = 60 - 30 = 80 - 60 = 70 - 40 = 90 - 70 =	30 - 20 	Analogie zu den Zerlegungen im ZR 10 beachten! Die Kinder werden immer wieder selber Analogien entdecken. Es ist wichtig, dass sie für solche Entdeckungen gelobt werden.
L3 Zu reinen Zehnern Einer addieren.		
20 + 6 = 60 + 2 = 80 + 5 = 70 + 3 = 90 + 7 = 30 + 1 = 40 + 9 = 80 + 4 = 50 + 8 =	30 + 1 	Die Zehner und Einer liegen getrennt (linke/rechte Hand), um das Stellenwertsystem zu verdeutlichen.

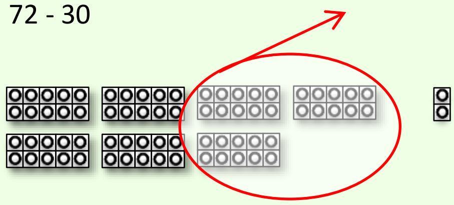
Die Levels 1 und 2 bedürfen unter Umständen einer Vorübung. Siehe „Arbeitsvorschläge Nr. 4“ als Download auf www.merkmal.info .

Aufgabenkärtchen	Legebeispiele	Bemerkungen
L4 Von reinen Zehnern Einer subtrahieren.		
40 - 6 = 80 - 2 = 50 - 5 = 20 - 3 = 60 - 7 = 80 - 1 = 70 - 9 = 90 - 4 = 30 - 8 =	40 - 6 	Hier müssen mehrere Aufgaben mit den Kindern vorher geübt werden. a): Um 6 wegzunehmen muss ein Zehner zerteilt werden. Es muss immer der letzte daran glauben (Den Letzten beißen die Hunde.). b): Da die übrigen 3 Zehner unbehelligt bleiben und vom zerteilten Zehner noch 4 Einer übrigbleiben, ergibt sich „34“. Dazu wird gesprochen: *„Vier Zehner liegen da; vom letzten Zehner schneide ich sechs weg; der ist nun kaputt und es sind nur noch vier; die ersten drei Zehner bleiben ganz, also sind es 34.“*
L5 Zu gemischten Zehnern ohne Zehnerüberschreitung Einer addieren.		
25 + 2 = 63 + 4 = 47 + 1 = 14 + 5 = 91 + 3 = 86 + 2 = 72 + 6 = 33 + 5 = 54 + 3 =	25 + 2 	Altbekanntes aus dem ZR 10.
L6 Von gemischten Zehnern ohne Zehnerunterschreitung Einer subtrahieren.		
25 - 2 = 68 - 4 = 47 - 3 = 14 - 2 = 99 - 3 = 86 - 2 = 75 - 3 = 33 - 1 = 57 - 4 =	25 - 2 	Altbekanntes aus dem ZR 10.
L7 Zu gemischten Zehnern Einer addieren – das Ergebnis ist ein reiner Zehner.		
25 + 5 = 63 + 7 = 47 + 3 = 14 + 6 = 91 + 9 = 86 + 4 = 72 + 8 = 33 + 7 = 54 + 6 =	25 + 5 	Hier wird das Bündeln von Einern zu einem Zehner geübt (= Whlg. aus Modul 7).
L8 Von gemischten Zehnern Einer subtrahieren – das Ergebnis ist ein reiner Zehner.		
14 - 4 = 91 - 1 = 86 - 6 = 72 - 2 = 33 - 3 = 54 - 4 = 25 - 5 = 63 - 3 = 47 - 7 =	14 - 4 	Leichte, aber wichtige Übungen.

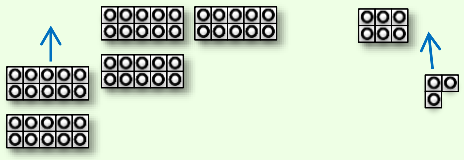
Aufgabenkärtchen	Legebeispiele	Bemerkungen
L9 Vorübungen zur Addition von gemischten Zehnern zu reinen Zehnern.		
20 + 20 + 3 = 30 + 50 + 2 = 50 + 30 + 1 = 20 + 60 + 3 = 60 + 10 + 2 = 30 + 40 + 3 = 10 + 80 + 7 = 40 + 30 + 4 = 50 + 20 + 3 =	20 + 20 + 3 	Das sind bekannte und gut vorstellbare Operationen. Es ist dies eine Vorstufe für Aufgaben bei „Level 11“.
L10 Vorübungen zur Subtraktion von gemischten Zehnern von reinen Zehnern.		
60 + 25 = 30 + 37 = 10 + 59 = 40 + 46 = 50 + 19 = 20 + 64 = 30 + 43 = 50 + 27 = 20 + 68 =	60 + 25 	Dieses Aufgabenkärtchen sollte auch in einer foliierten Version für Vorübungen bereitliegen. Dabei wird mit einem wasserlöslichen Folienschreiber die Einerstelle (Rucksack) des 2. Summanden übermalt (60 + 2● =) und 60 + 20 gerechnet. Dann wird die Übermalung weggewischt und nachgeschaut, was noch im Rucksack ist und diese 5 dazugerechnet.
L11 Zu reinen Zehnern gemischte Zehner addieren.		
70 - 20 - 3 = 50 - 30 - 2 = 40 - 10 - 4 = 90 - 50 - 3 = 80 - 60 - 2 = 50 - 30 - 3 = 70 - 30 - 7 = 30 - 10 - 4 = 60 - 50 - 3 =	70 - 20 - 3 	Die Operationen sind bereits von vorigen Levels bekannt. Zunächst werden die 2 Zehner weggenommen. Dann wird der <u>letzte</u> Zehner zerteilt. Der verbleibende Rest des Zehners wird zu 7 Einern. Es ist dies eine Vorstufe für „Level 12“.
L12 Von reinen Zehnern gemischte Zehner subtrahieren.		
70 - 24 = 50 - 11 = 40 - 36 = 90 - 62 = 80 - 23 = 50 - 34 = 70 - 15 = 30 - 28 = 60 - 47 =	70 - 24 	Dieses Aufgabenkärtchen sollte auch in einer foliierten Version für Vorübungen bereitliegen. Dabei wird mit einem wasserlöslichen Folienschreiber die Einerstelle (Rucksack) des Subtrahenden übermalt (70 - 2● =) und 70 - 20 gerechnet. Dann wird die Übermalung weggewischt und nachgeschaut, was noch im Rucksack ist und diese 4 abgezogen.
L13 Zu gemischten Zehnern reine Zehner addieren.		
61 + 20 = 32 + 30 = 59 + 40 = 27 + 70 = 18 + 50 = 54 + 10 = 45 + 30 = 13 + 60 = 9 + 90 =	32 + 30 	Die 2 Einer mussen wegrücken, damit die 3 Zehner zu den 3 anderen Zehnern gelegt werden können. (30 + 30 + 2)

Aufgabenkärtchen	Legebeispiele	Bemerkungen

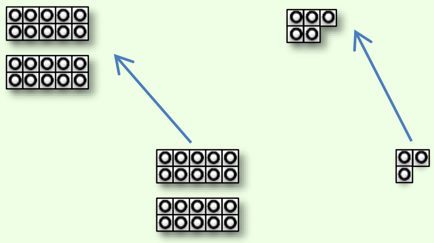
L14 Von gemischten Zehnern reine Zehner subtrahieren.

72 - 30 = 33 - 20 = 54 - 30 = 25 - 20 = 63 - 40 = 47 - 20 = 14 - 10 = 91 - 50 = 86 - 80 =	72 - 30 	Die Operation wird wie folgt geschildert: *„Siebzig minus dreißig ist vierzig und die zwei Einer sind noch da, also sind es zweiundvierzig.“* Sich diese Operation im Geiste vorzustellen, verhindert die häufigen Zahlendreher.

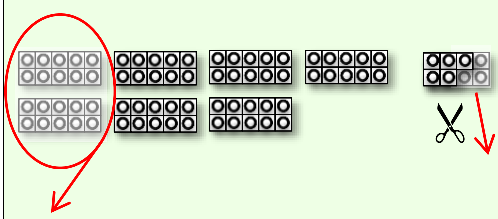
L15 Vorübungen zur Addition von gemischten Zehnern **ohne** Zehnerüberschreitung.

36 + 20 + 3 = 54 + 30 + 2 = 47 + 50 + 1 = 23 + 20 + 3 = 16 + 60 + 2 = 66 + 30 + 3 = 81 + 10 + 7 = 32 + 40 + 4 = 24 + 50 + 3 =	36 + 20 + 3 	Dies ist eine Kombination von den bereits bekannten Operationen von **zuerst** 36 + 20 und **dann** 56 + 3 und bildet die Vorstufe für „Level 17“.

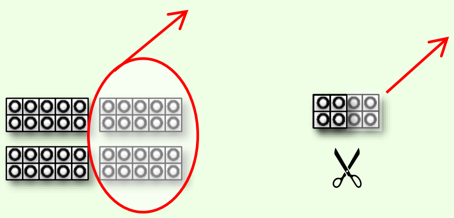
L16 Vorübungen zur Subtraktion von gemischten Zehnern **ohne** Zehnerunterschreitung.

25 + 23 = 63 + 15 = 47 + 42 = 14 + 53 = 32 + 45 = 86 + 13 = 24 + 64 = 33 + 33 = 54 + 25 =	25 + 23 	Dieses Aufgabenkärtchen sollte auch in einer foliierten Version bereitliegen, mit der Vorübungen gemacht werden. Dabei wird mit einem wasserlöslichen Folienschreiber die Einerstelle (Rucksack) des 2. Summanden übermalt (25 + 2● =) und 25 + 20 gerechnet. Dann wird die Übermalung weggewischt und nachgeschaut, was noch im Rucksack ist und diese 3 dazugerechnet.

L17 Gemischte Zehner addieren ohne Zehnerüberschreitung.

78 - 20 - 3 = 54 - 30 - 2 = 47 - 10 - 4 = 95 - 50 - 3 = 86 - 60 - 2 = 57 - 30 - 3 = 88 - 10 - 7 = 39 - 30 - 4 = 65 - 50 - 3 =	78 - 20 - 3 	Dies ist eine Kombination von den bereits bekannten Operationen von **zuerst** 78 - 20 und **dann** 58 - 3 und bildet die Vorstufe für „Level 18“.

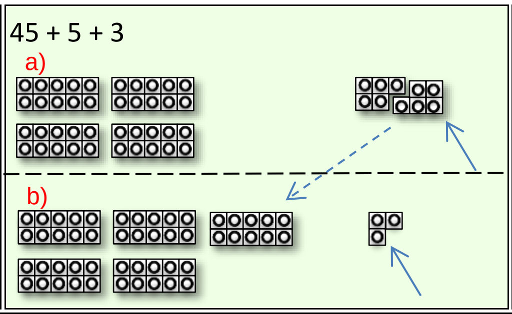
L18 Gemischte Zehner subtrahieren **ohne** Zehnerunterschreitung.

48 - 24 = 29 - 15 = 65 - 32 = 27 - 15 = 86 - 51 = 74 - 33 = 93 - 91 = 56 - 45 = 37 - 22 =	48 - 24 	Dieses Aufgabenkärtchen sollte auch in einer foliierten Version für Vorübungen bereitliegen. Dabei wird mit einem wasserlöslichen Folienschreiber die Einerstelle (Rucksack) des Subtrahenden übermalt (48 - 2●=) und 48 - 20 gerechnet. Dann wird die Übermalung weggewischt und nachgeschaut, was noch im Rucksack ist und diese 4 abgezogen.

Aufgabenkärtchen	Legebeispiele	Bemerkungen

L19 Vorübungen zur Addition von Einern zu gemischten Zehnern **mit** Zehnerüberschreitung.

L 19						
45	+ 5	+ 3	=			
27	+ 3	+ 2	=			
61	+ 9	+ 1	=			
53	+ 7	+ 3	=			
36	+ 4	+ 2	=			
19	+ 1	+ 3	=			
74	+ 6	+ 3	=			
88	+ 2	+ 4	=			
42	+ 8	+ 1	=			

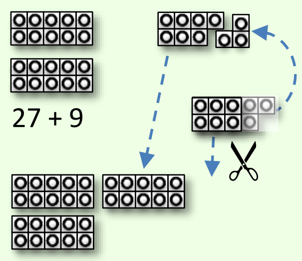


Hier wird die Zehnerüberschreitung vorbereitet. a): Die erste Addition ergibt an der Einerstelle einen vollen Zehner, b): der zu den anderen Zehnern überführt werden muss.

L20 Vorübungen zur Subtraktion von Einern von gemischten Zehnern **mit** Zehnerunterschreitung.

L 21a		
58	+ 7	=
46	+ 8	=
27	+ 9	=
65	+ 6	=
39	+ 5	=

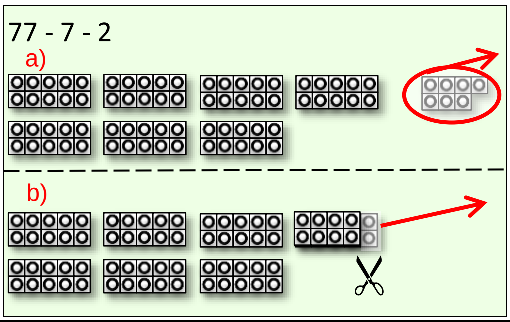
L 21b		
74	+ 8	=
13	+ 9	=
87	+ 6	=
35	+ 7	=
48	+ 8	=



Das ist nun die Zehnerüberschreitung, die die Kinder vom Überschreiten des ersten Zehners kennen. Beachtet muss werden, dass beim Überschreiten des Zehners ein neuer Zehner entsteht, der an die Zehnerstelle rückt. Manche Kinder brauchen anfangs noch Bögen, wie sie sie von der Zehnerüberschreitung kennen: 27 + 9 = 36
3 6

L21 Zu gemischten Zehnern **mit** Zehnerüberschreitung Einer addieren.

L 20			
77	- 7	- 2	=
53	- 3	- 5	=
45	- 5	- 3	=
92	- 2	- 4	=
81	- 1	- 7	=
56	- 6	- 3	=
72	- 2	- 7	=
34	- 4	- 4	=
68	- 8	- 1	=

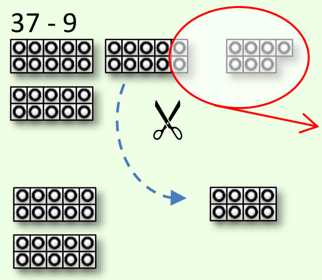


Das sind Vorübungen für die Zehnerunterschreitung. a): Die erste Subtraktion ergibt einen reinen Zehner (70). b): Dann müssen vom letzten Zehner 2 abgetrennt werden, wodurch der Zehner aufgelöst ist und als Rest aus 8 Einern an die Einerstelle überführt wird.

L22 Von gemischten Zehnern Einer **mit** Zehnerunterschreitung subtrahieren.

L 22a		
94	- 6	=
72	- 8	=
63	- 9	=
81	- 5	=
55	- 7	=

L 22b		
37	- 9	=
16	- 8	=
86	- 9	=
62	- 5	=
23	- 7	=



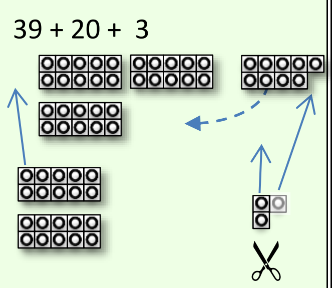
Der letzte Zehner wird kaputt gemacht, so bleiben noch 8 Einer übrig. Bögen können hier hilfreich sein: 37 - 9 = 28
2 7

Das Beherrschen der Aufgaben von L4 und die Einerzerlegungen aus Modul 2 sind für das Lösen dieser Aufgaben absolut notwendig!

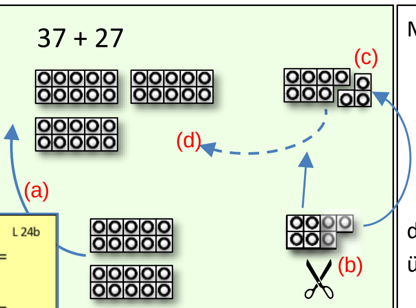
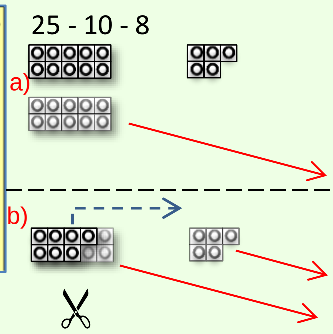
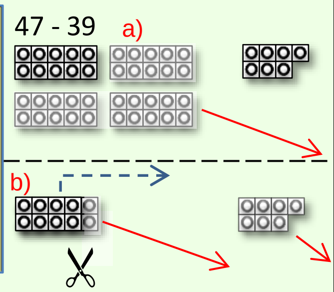
L23 Vorbereitung von Additionen mit gemischten Zehnern **mit** Zehnerüberschreitung.

L23a				
39	+ 20	+ 3	=	
47	+ 40	+ 5	=	
16	+ 60	+ 6	=	
74	+ 10	+ 7	=	
24	+ 50	+ 9	=	

L23b				
58	+ 20	+ 6	=	
65	+ 20	+ 7	=	
36	+ 30	+ 8	=	
27	+ 40	+ 7	=	
44	+ 30	+ 9	=	



Dies ist eine Verkettung von zwei bekannten Operationen (L 9 und L 21).

Aufgabenkärtchen	Legebeispiele	Bemerkungen
L24 Addition von gemischten Zehnern **mit** Zehnerüberschreitung.		
L 24a 79 + 16 = 15 + 78 = 28 + 63 = 53 + 39 = 37 + 27 =	 L 24b 68 + 28 = 29 + 54 = 36 + 26 = 14 + 67 = 45 + 48 =	Mit dem Folienstift wird wieder die Einerstelle übermalt: 37 + 2● = und a): zunächst 37 + 20 = gerechnet. Dann wird der „Rucksack" wieder freigewischt. b): Der jetzt sichtbare 7er wird geteilt in 3\4 und c): ein Zehner aufgefüllt und d): zu den 5 Zehnern gerechnet. 4 bleibt nun noch übrig und ergibt mit den 6 Zehnern 64. Denkweg: *„20 geht zu 37. Nun sind es 5 Zehner und 7 Einer, also 57. Dazu kommen noch die 7 von 27: davon passen 3 zu 57 damit es 60 sind, und 4 sind vom 7er noch übrig, also 64."*
L25 Vorbereitung von Subtraktionen mit gemischten Zehnern **mit** Zehnerunterschreitung.		
L25a 92 - 30 - 5 = 64 - 40 - 7 = 25 - 10 - 8 = 51 - 30 - 4 = 76 - 20 - 8 =	L25b 94 - 60 - 6 = 46 - 20 - 7 = 34 - 10 - 9 = 82 - 60 - 5 = 37 - 20 - 9 = 	Dies ist eine Verkettung von zwei bekannten Operationen (L 10 und L 22).
L26 Subtraktionen mit gemischten Zehnern **mit** Zehnerunterschreitung.		
L 26a 82 - 56 = 91 - 42 = 66 - 39 = 48 - 19 = 77 - 28 =	L 26b 64 - 37 = 52 - 45 = 86 - 28 = 47 - 39 = 31 - 24 = 	Dies ist eine Verkettung von zwei bekannten Operationen (L 10 und L 22). Mit dem Folienstift wird die Einerstelle übermalt: 47 - 3● = und a): 47 - 30 = 17 gerechnet. Dann wird der Inhalt des „Rucksacks" wieder freigelegt und b): von 17 werden 9 abgezogen.
L27 Gemischte Aufgaben		
L 27a 7 + 25 = 34 - 27 = 26 + 59 = 28 - 16 = 35 + 19 = 42 - 34 = 49 + 43 = 56 - 27 = 63 + 28 =	L 27b 90 - 37 = 22 + 59 = 72 - 46 = 63 + 19 = 84 - 64 = 45 + 49 = 36 - 27 = 27 + 68 = 81 - 47 =	Wer den letzten Level erreicht hat, kann im ZR 100 mit gemischten Zehnern addieren und subtrahieren.

Übungen zur Festigung und Steigerung der Geläufigkeit und Orientierung im Zahlenraum 100

Rechnen von einer Zahl aus

Nicht selten gibt es Kinder, die (wie orientierungslos) nicht wissen, welche Auswirkungen eine Addition bzw. Subtraktion für die Position des Ergebnisses im Zahlenraum hat – das Kind „verwechselt“ scheinbar Plus und Minus. Beim „Rechnen von einer Zahl aus“ wird zusammen mit den Rechenoperationen auch die Orientierung im Zahlenraum geübt. So, wie man ein unbekanntes Gelände von einem Basisstützpunkt aus erkundet, wird auch hier zur Festigung der Orientierung von Basiszahlen aus operiert. Eine Basiszahl ist keine spezielle Zahl, sondern irgendeine x-beliebige Zahl. Von der gewählten Basiszahl werden jeweils Aufgaben aus allen wichtigen Levels „in alle Richtungen“ wiederholt und geübt.

a) Einleitung

Eine Zahl im ZR 100 wird verbal vorgegeben (z. B. 68). Das Kind zeigt, wie diese Menge aussieht indem es mit den Händen das Bild der Menge auf der Tischplatte andeutet (so, wie auf Seite 51 erklärt). Dann legt das Kind die Menge mittels Mengenkärtchen (10er u. 1er) auf den Tisch. Das gelegte Mengenbild vor Augen gibt das Kind nun Antwort auf folgende (systematisch aufbauende) Fragen ohne dabei das Legematerial zu verschieben:

Wie viel ist es, wenn du …

… 1 dazugibst? (Addition ohne Zehnerüberschreitung)
… 4 wegnimmst? (Subtraktion ohne Zehnerunterschreitung)
… 2 dazugibst? (Addition auf den reinen Zehner)
… 8 wegnimmst? (Subtraktion auf den reinen Zehner)
… 3 Zehner dazugibst?
… 2 Zehner wegnimmst?
… 9 wegnimmst? (mit Zehnerunterschreitung)
… 5 dazugibst? (mit Zehnerüberschreitung)
… 14 dazugibst? (Addition mit gemischten Zehnern und Zehnerüberschreitung)
… 29 wegnimmst? (Subtraktion mit gemischten Zehnern und Zehnerunterschreitung)

AB
8.3

b) Übung

Beim Üben wird kein Anschauungsmaterial mehr verwendet. Auf foliierten Kärtchen stehen systematisch zusammengestellte Aufgaben (Abb. oben, Beispiele auch in der Arbeitsblättersammlung), die nur vor dem geistigen Auge gelöst werden. Die Lösungen werden mit wasserlöslichem Folienstift auf die Kärtchen geschrieben.

Wichtig ist, dass laufend Stichproben gemacht werden, bei denen das Kind die „Mengendenkweise“ demonstrieren soll. Hilfreich und anspornend ist auch hier eine Arbeits- und Belohnungsstruktur einzurichten.

Modul 9

Ergänzungen im ZR 100

Ziele:

- **Ergänzungen (+, -) mit Zehnerüberschreitung bzw. Zehner-unterschreitung im ZR 100 im Kopf durchführen können.**

45 + __ = 73

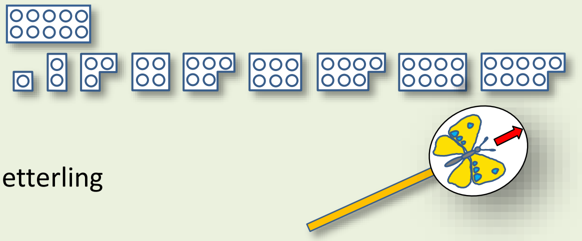
64 – __ = 27

Modul 9: Ergänzungen im ZR 100

Bei den Ergänzungen im ZR 100 geht es um einen Denkweg, der für manche Kinder eine besondere Herausforderung darstellt. Dieser Weg wird auch hier über die gedankliche Mengen-Operation im Detail vermittelt.

Ergänzungen im ZR 100 mit Plus

Arbeitsmittel: 10 Zehnerbildkärtchen
je 1 Einerbildkärtchen
2 Holzstäbchen
1 Holzstäbchen mit Schmetterling



AB 8.2

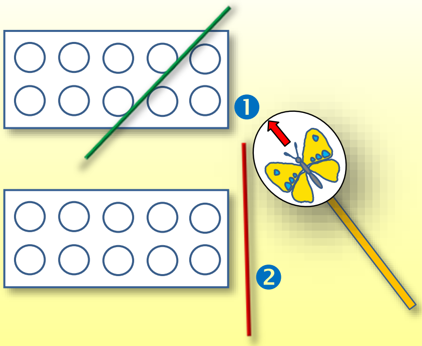
AB 9.1

a) Ergänzen auf ganze Zehner

Im Modul 3 wurde bereits auf 10 ergänzt. Nach kurzer Wiederholung wird „zehnerüberspringend“ auf reine bzw. ganze Zehner ergänzt:

z. B. 7 + ___ = 20 *„Sieben plus wieviel gleich zwanzig?“*

Zur Einführung des Rechenganges wird die Aufgabe gelesen, erörtert! und die Menge 20 mit Kärtchen gelegt. Mit den Stäbchen werden die Ausgangsmenge und die Zielmenge markiert (siehe Abb. unten). Dann wird die Handlung frei formuliert: *„Der Schmetterling ist bei 7 und will zu 20. Über wie viele Punkte muss er fliegen?“*



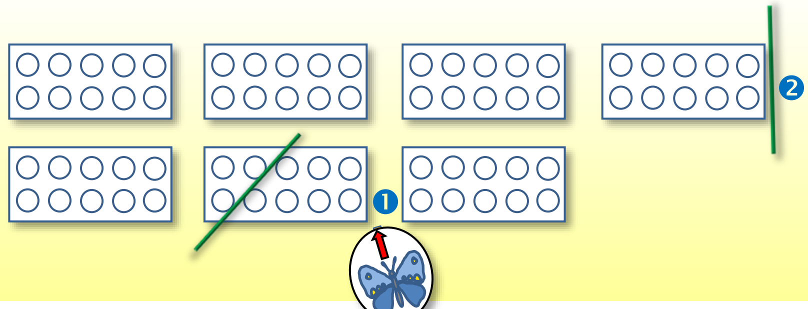
❶ Der Schmetterling fliegt zuerst über die drei Mengenelemente bzw. über den Dreier und rastet (schläft) dann zwischen den beiden Zehnern.
Das Kind schließt die Augen und stellt sich die „zurückgelegte Menge“ – in diesem Fall drei – noch einmal vor. Das sich Vorgestellte soll in Wort und Gestik ausgedrückt werden. Gleich anschließend wird der weitere Weg zum Endziel mit geschlossenen Augen geschildert: *„Der Schmetterling muss noch den nächsten Zehner überfliegen.“* Dieser bewusste, geistige Blick zurück und nach vorne ist wichtig!

❷ Nach der kleinen Rast fliegt der Schmetterling über den gesamten zweiten Zehner.
Nun lässt das Kind den zurückgelegten Weg noch einmal Revue passieren: „Von sieben *ist der Schmetterling zuerst drei vorwärts geflogen und dann noch zehn. Also insgesamt dreizehn! Das kann man so aufschreiben:*

7 + ___ = 20 *und die Lösung ist* **7 + 13 = 20**.“

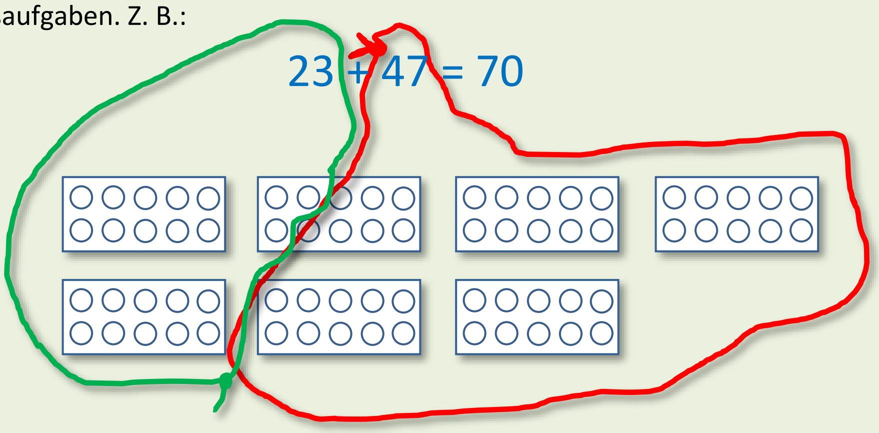
Entsprechend dem Aufnahmevermögen des Kindes werden noch weitere Beispiele auf diese Art durchgearbeitet:

z. B. **33 + ___ = 70**



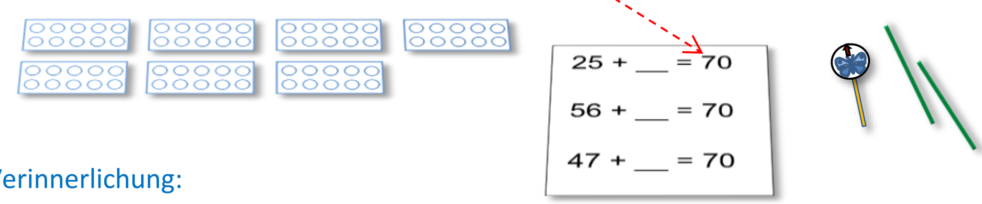
Zu Beginn werden der Ausgangs- und der Zielpunkt mittels Stäbchen markiert.
❶ Der Schmetterling überfliegt zuerst 7 Punkte bis der Zehner voll ist und rastet bei 40.
❷ Dann fliegt er über die restlichen 3 Zehner bis er bei 70 ankommt.

Nur bei Bedarf: Da unter Umständen auch Ergänzungsaufgaben in der für Kinder schwer zu verstehenden Form von ___ + 47 = 70 gefordert werden, empfiehlt es sich, die räumliche Situation gleich beim Einführen der Ergänzungen auf die Notation der Aufgabe zu übertragen. Das könnte z. B. mit Schnüren oder mit Buntstift auf AB usw. geschehen. Später hilft das beim Verstehen der „verdrehten“ Ergänzungsaufgaben. Z. B.:



Weiterer Übungsverlauf:

Nachdem das Ergänzen in der Form von konkreten Handlungsschritten eingeführt worden ist, macht das Kind mehrere Beispiele mit *derselben* Zielzahl. Die Zielzahl (ein reiner Zehner) wird nach einigen Aufgaben gewechselt. Das Legematerial bleibt zunächst vor dem Kind liegen, damit es je nach Bedarf über die Anschauung verfügen kann. Jedes Kind findet alleine den richtigen Moment, um sich von den Anschauungsmaterialein abzulösen.

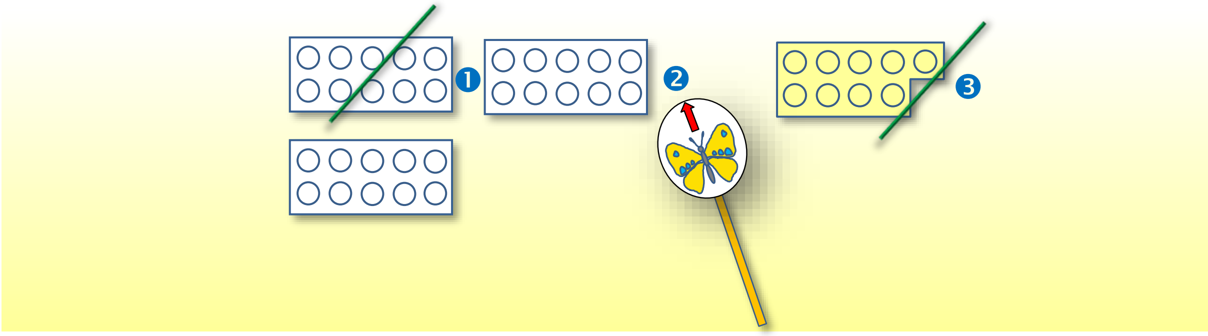


Schritte bis zur Verinnerlichung:

a) handelnd mit Legematerial, Schmetterling und Stäbchen
b) handelnd mit Legematerial und Stäbchen ohne Schmetterling
c) rein visuell, mit Blicken auf das Legematerial
d) handelnd (Gesten in der Luft), sich das Legematerial nur noch vorstellend
e) rein vor dem geistigen Auge
d) individueller innerer Gedankenweg (vorstellen, abrufen usw.)

b) Ergänzen auf gemischte Zehner

Bei Aufgaben wie **5 + __ = 39** kommt nur ein Arbeitsschritt dazu. Der Schmetterling rastet beim letzten vollständigen Zehner ein zweites Mal, ehe er über die restlichen Einer fliegt. Die neun Einer der Zahl 39 liegen von den Zehnern leicht abgerückt. Ausgangs- und Endpunkte werden wieder mit Stäbchen markiert.



Bei jeder Rast soll sich das Kind (ev. bei geschlossenen Augen) noch einmal in Gedanken den zurückgelegten Weg vorstellen. Ebenso sollte der noch vor ihm liegende Weg sprachlich formuliert werden. Ziel ist wiederum das sich Vorstellenkönnen der Rechenoperationen und das klare Wissen darüber, was bei diesen Rechenoperationen geschieht und in welchen Fragestellungen sie angewendet werden kann.

❶ Zehner voll machen ❷ über ganze Zehner ❸ über die restlichen Einer

❶ Bei der ersten Rast spricht das Kind: „*Der Schmetterling fliegt über fünf Einer und am Ende des vollen Zehners rastet er*."

❷ Die zweite Pause wird am Ende der ganzen Zehner eingelegt: „*Der Schmetterling ist schon über fünf Einer bis ans Ende des Zehners geflogen und hat dann gerastet. Dann ist er über die zwei ganzen Zehner geflogen und rastet nun. Bis hierher ist der Schmetterling über fünfundzwanzig Punkte geflogen. Jetzt muss er noch über die neuen Einer fliegen*."

❸ Ist das Ziel erreicht, wird über den gesamten Weg nachgedacht: „*Zuerst fünf und zwanzig, macht zusammen fünfundzwanzig und dann noch neun, macht vierunddreißig*."

Abschließend fliegt der Schmetterling noch einmal schnell die Strecke mit den Raststationen ab, damit sich der Drei-Schritte-Prozess einprägt. So, wie bei Wegbeschreibungen in der Landschaft nur die Abzweigungen genannt werden, soll auch hier der Weg vom Ausgangspunkt zum Zielpunkt nur mit den Raststationen erklärt werden. Zur Vorbereitung für die Ergänzungen mit Minus kann das Kind den Weg auch wieder zurückverfolgen und erklären.

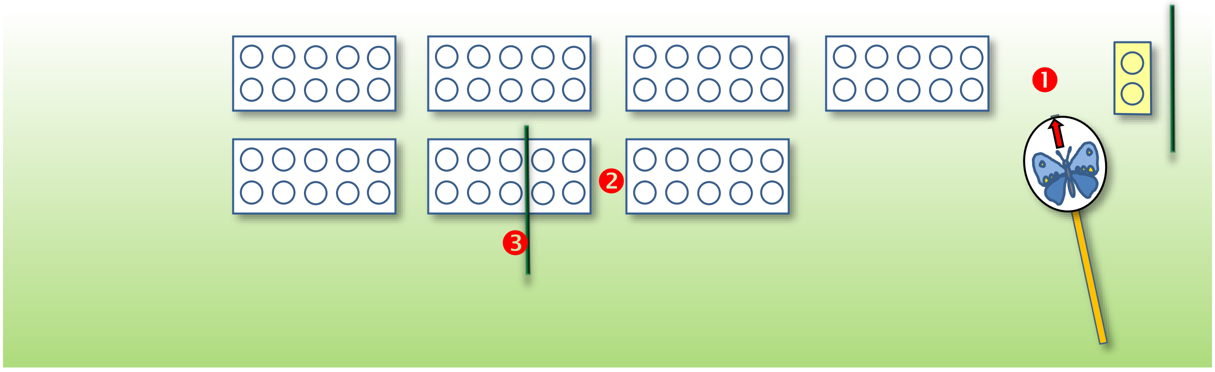
Weiterer Übungsverlauf:
Wie oben beim Ergänzen auf ganze Zehner erwähnt, erfolgt auch hier das Üben anfangs anhand des Legematerials, von dem sich das Kind allmählich ablöst. Es empfiehlt sich, Arbeitsblätter ebenso nach dem Prinzip der gleichbleibenden Basiszahl zu gestalten.

Das Ergänzen in den nächsten Zehner (z. B. **45 + __ = 53**) stellt eine Sonderform des „*Ergänzen auf gemischte Zehner*" dar. Vorgegangen wird auf dieselbe Weise, nur dass der Sprung über die ganzen Zehner entfällt.

Ergänzungen im ZR 100 mit Minus

Die Vorgangsweise ist beim Ergänzen mit Minus gleich wie beim Ergänzen mit Plus, nur dass nun der Schmetterling in die andere Richtung fliegt. Für manche Kinder ist es wichtig, dass das Ergänzen mit Minus vom Ergänzen mit Plus abgeleitet wird, damit sie ein Verständnis von der Operation erlangen können.
In diesem Fall wird eine Aufgabe mit Plus vorgegeben, z. B. 36 + __ = 72 und mit dem Legematerial dargestellt. Nachdem sie gelöst wurde, erhält das Kind den Hinweis, dass die Aufgabe auch zurück gerechnet werden kann. Der Schmetterling fliegt nun von 72 zurück zu 36. Über wie viele Punkte muss er fliegen? Er legt auf dem Rückweg wieder Pausen auf den gleichen Raststationen ein. Der Rückweg muss aber anders aufgeschrieben werden. Die Notation wird zuerst vorformuliert: „*Von 72 muss der Schmetterling wie viele Punkte zurückfliegen bis er bei 36 ist*?“ Dieser Gedanke wird in der mathematischen Notation ausgedrückt:

72 - __ = 36



Bei der konkreten Handlung werden wieder Ausgangs- und Zielpunkt durch Stäbchen gekennzeichnet. Der Drei-Schritte-Prozess verläuft dann wie folgt:

❶ Der Schmetterling fliegt zuerst über die beiden Einer <u>zurück</u> und rastet vor den ganzen Zehnern.

❷ Anschließend werden die ganzen Zehner <u>zurück</u> überflogen und bevor er die vier Einer vor dem Ziel überfliegt.

❸ Am Ende werden die vier Einer bis zum Ziel <u>zurück</u> überflogen. Auch hier ist das Verbalisieren der drei Schritte bis zur Erlangung der Lösung wichtig.

Das Kind hat sich an dieser Stelle schon bei den Ergänzungen mit Plus eine gewisse Routine erarbeitet, sodass diese Phase der konkreten Anschauung entsprechend schnell wieder verlassen werden kann.

Weiterer Übungsverlauf:

Auch hier erfolgt das Üben anfangs mit Blick auf das Legematerial, von dem sich das Kind allmählich selber ablöst. Arbeitsblätter werden sinnvollerweise nach dem Prinzip „mehrere Aufgaben mit derselben Basiszahl“ gestaltet.

Modul 10

Malreihen und In-Sätzchen

Ziel:

Mal- und In-Sätzchen lösen können

Modul 10: Malreihen und In-Sätzchen

Vorübung

Für viele Kinder ist die Anschauung mit realen Gegenständen für alle Malreihen von Vorteil. Dafür bietet sich die Darstellung mit den Eierschachteln an. Hierzu liegen ausreichend Zehnerschachteln bereit, in die mit den farbigen Eiern die aktuelle Malreihe hineingelegt wird. Diese „körperliche" Malreihe soll lange zugänglich bereit liegen, damit sie bei Bedarf aufgesucht, betrachtet und diskutiert werden kann.
Hilfreich ist diese Darstellung auch bei der Einführung des 1x1-Mengenbildstreifen (S. 69 bzw. AB 10.2).

Zunächst sollen die Begriffe „Anzahl" und „Einheit" geklärt werden.

Einheit: „der Zehner" oder „der Achter", Anzahl: „zehn" oder „acht" usw.

Bereit liegen 2er-, 3er-, 4er-, 5er-, 6er-, 7er-, 8er-, 9er- und 10er-Eierschachteln und viele Eier in einer Kiste.

„*Nimm 2* (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) *Eier und befülle eine 2er-Schachtel* (3er-, 4er-, … 10er-Schachtel)."
Dazu wird gesprochen: „*In einer 2er-Schachtel haben 2 Eier Platz*." usw.

Der Unterschied zwischen einzelnen Eiern (Anzahl) und den Eierschachteln (Einheit) wird dem Kind bewusst gemacht. Um Begriffe zu festigen und in das Denken zu übernehmen, müssen sie eingeübt werden:

„*Bring mir fünf Eier!*" – Das Kind muss beide Hände nehmen, um sie tragen zu können.
„*Bring mir eine 5er-Schachtel.*" – Die Einheit kann mit einer Hand getragen werden.

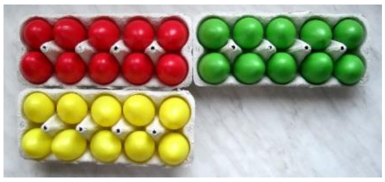
Die Sprechweise wird abgekürzt:

„*Bring mir fünf!*" - „*Bring mir einen 5er!*"

In einer größeren Gruppe (z. B. Klasse) kann dies in einem Spiel eingeübt werden. Z. B. im Sitzkreis spricht ein Kind: „*Der Platz vor meinem Stuhl ist leer, bitte Lea, leg mir einen Neuner* (oder neun) *her.*" usw.

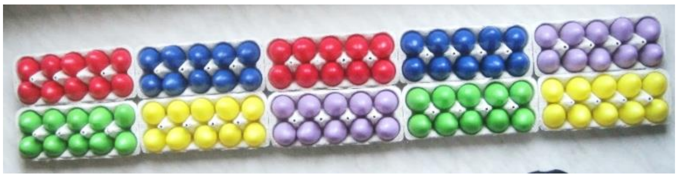
Erarbeitung der ersten Malreihe: Die 10er-Reihe

a) Malreihe mit Eierschachteln aufbauen



Die Lehrperson verlangt: „*Bitte, bring mir drei 10er-Schachteln.*"
Das Kind bringt drei 10er-Schachteln und legt sie in der gewohnten Anordnung auf die Arbeitsfläche:
L.: „*Wie viele Eier sind in den drei 10er-Schachteln?*"
K.: „*In drei 10er-Schachteln sind 30 Eier.*"
L.: „*Wie viele 10er-Schachteln kann man mit 30 Eiern füllen?*" (Vorbereitung für die In-Sätzchen.)
K.: „*Mit 30 Eiern kann man drei 10er-Schachteln füllen.*"
Unter konsequenter Einhaltung der Sprechweise und der Handlung werden alle Beispiele der 10er-Reihe durchgeübt bis schließlich die abgekürzte Sprechweise eingeführt wird:

Zuerst wird jeweils das Wort „Schachtel" weggelassen („*Bring mir fünf 10er! Wie viele Eier sind in fünf 10ern?*") und dann auch das Wort „Eier" („*Fünf 10er sind 50 und 50 sind fünf 10er.*").



Nun wird die 10er-Reihe auf- und abbauend gelegt. „*Jetzt machen wir das einmal der Reihe nach und sprechen dazu.*"

„Ein 10-er sind 10 und 10 sind ein 10er.“
„Zwei 10-er sind 20 und 20 sind zwei 10er.“
„Drei 10-er sind 30 und 30 sind drei 10er.“

„Zehn 10-er sind 100 und 100 sind zehn 10er.“
„Neun 10-er sind 90 und 90 sind neun 10er.“
„Null 10-er sind 0 und 0 sind null 10er.“

Abschließend bleiben zehn Zehner für die spätere Anschauung der 10er-Reihe liegen.

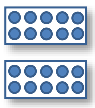
b) Der Gedanke des Malnehmens und seine Verschriftlichung

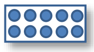
Nun wird aufgeschrieben, was bereits mit den Zehner-Schachteln gemacht wurde.
Zuerst wird aber erklärt, was das Symbol und der Begriff „mal“ bedeutet:

Mache 3mal die Tür auf. Zeichne 5mal einen blauen Strich. Greife dir 7mal an die Nase.
„Mal“ bedeutet, jetzt kommt immer das Gleiche. Wie oft das Gleiche kommt, wird vor dem „mal“ gesagt (7mal an die Nase greifen). Zwei mal zehn heißt: „Jetzt kommt zweimal ein 10er.“
Das Wort „mal“ schreiben die Mathematiker nur mit einem Punkt.

AB 10.1

Zum Beispiel:



2 •  „Zwei mal ein Zehner.“

Und wenn man nur Zahlen nimmt, dann schreibt man so:

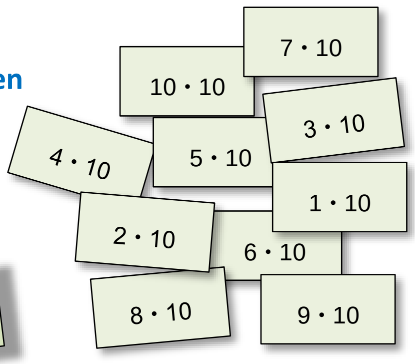
2 • 10

und gesprochen wird dann: „Zwei mal zehn.“

Das Aufschreiben der Handlungen wird geübt: *„Lege viermal einen 10er und schreibe das auf einen Notizzettel.“* usw. Spannender und damit einprägsamer wird die Übung, wenn nach dem „Viermal“ eine kleine Pause gelassen wird: *„Viermal … zehn*! *Dreimal … auf den Tisch klopfen*! *Fünfmal … zehn*!“

Früher hat man „mal“ nicht mit einem Punkt geschrieben, sondern mit einem ×. Das kann man heute noch manchmal sehen, z. B. „4×“ heißt „viermal“.

c) Lesen der Verschriftlichung, das Gelesene erklären und ausführen

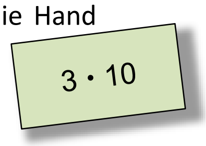


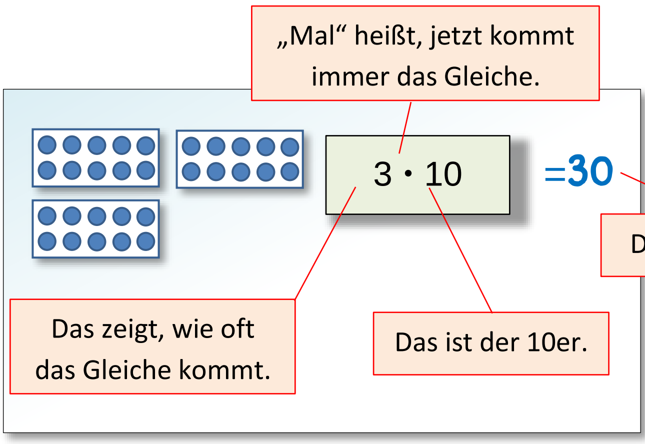
AB 10.5 ff

Es liegen Kärtchen mit den Malsätzchen aus der Zehnermalreihe bereit.

Die Lehrperson nennt eine Rechnung: *„Drei mal zehn.“*

Das Kind nimmt das entsprechende Kärtchen selber in die Hand und liest: *„Drei mal zehn“* und erklärt, was das bedeutet. *„Das bedeutet dreimal einen Zehner.“*





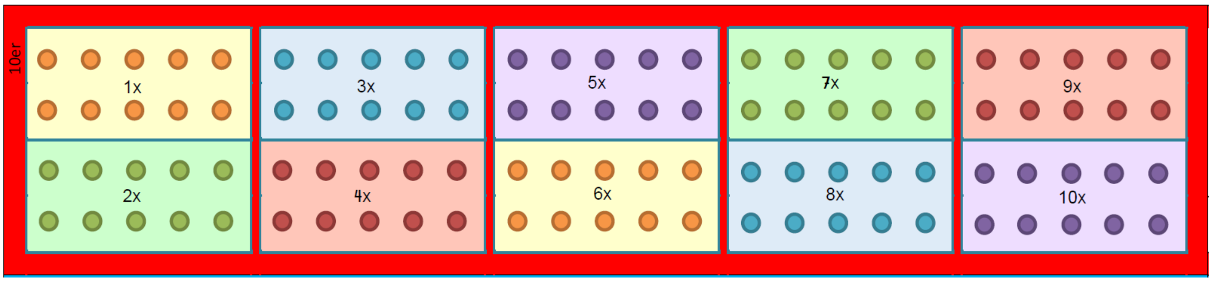
Das Kind holt darauf drei 10er-Kärtchen, legt sie zusammen mit dem Rechenkärtchen auf ein Blatt Papier und schreibt das Ergebnis dazu.

Abschließend erklärt das Kind, was es im Einzelnen bedeutet!

d) Einführen des 1x1-Mengenbildstreifens als Merkhilfe

Um sich den Grundgedanken der Operation des Malnehmens im geistigen Auge zu bewahren, werden alle Malreihen für sich auch als Mengenbild erarbeitet. Die 1x1-Mengenbildstreifen sind nicht nur als Merkhilfe zu verstehen. Sie sollen auch anregen, mathematische Muster, die außerhalb der herkömmlichen Malsätzchen liegen, zu erkennen und je nach intellektueller Leistungsfähigkeit zum Spiel mit Zahlen (Mengen) anregen. Kinder, die leicht lernen, können auch direkt hier mit der Erarbeitung der Malreihen beginnen.

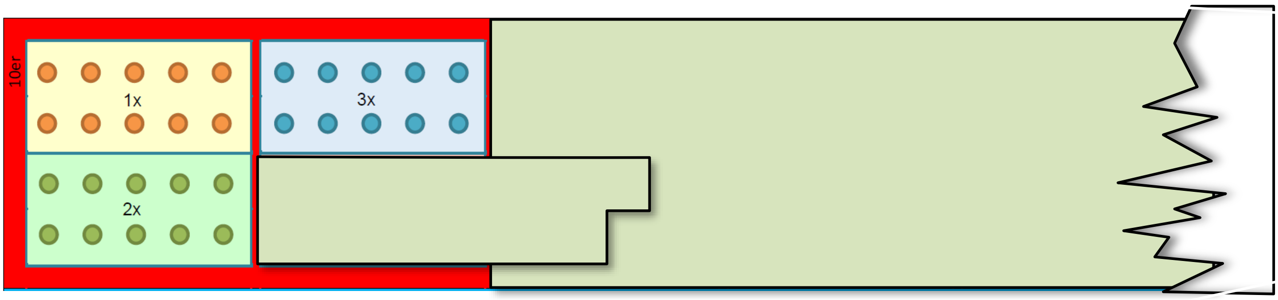
1x1-Mengenbildstreifen für die 10er-Malreihe:



AB 10.2 ff

Zuerst soll das richtige Abdecken geübt werden. Dazu sind zwei Abdeckstreifen nötig (siehe Abb. unten, graugrüne Flächen), die auch in der Arbeitsblättersammlung unter AB 10.2 ff zu finden sind. Die Arbeit mit dem 1x1-Mengenbildstreifen läuft in folgenden Schritten ab:

❶ Die Lehrperson gibt vor: *„Drei mal zehn.“* Das Kind deckt den 1x1-Mengenbildstreifen so ab, dass nur noch drei Zehner bzw. 30 zu sehen sind.



❷ Das Kind spricht nun: *„Drei mal zehn gleich 30.“*

❸ Das Kind schreibt das Malsätzchen auf einen Notizzettel.

e) Einüben der Malsätzchen

AB 10.4 ff

Sobald die Arbeitsweise mit 1x1-Mengenbildstreifen ausreichend eingeübt wurde, können die Malsätzchen zunächst mit Arbeitsblättern (exemplarisch in der Arbeitsmittelsammlung, Modul 10) und schließlich mit den 1x1-Kärtchen (zum Ausdrucken in der Arbeitsmittelsammlung, Modul 10) vertieft werden.

Dabei hilft der 1x1-Mengenbildstreifen solange, bis das Kind ihn selber nicht mehr verwenden mag.

Wichtig: Beim Üben mit den Arbeitsblättern oder den 1x1-Kärtchen soll das Kind den 1x1-Mengenbildstreifen so lange verwenden, bis es ihn nicht mehr braucht und die Rechnungen ohne die direkte Anschauung lösen kann.

Direkt im Anschluss an die 10er-Reihe können die dazugehörenden In-Sätzchen gelernt werden (Vorschläge auf Seite 73).

Erarbeitung der übrigen Malreihen

Empfehlenswert ist, die Malreihen in der nach dem Schwierigkeitsgrad geordneten Reihenfolge zu erlernen:

10 - 2 - 5 - 4 - 8 - 3 - 9 - 6 - 7.

Zumindest mit lernschwächeren Kindern werden zuerst *nur die ersten fünf* Malsätzchen der jeweiligen Malreihe gelernt (aber auch durchschnittlich begabten Kindern wäre dies eine Erleichterung). Erst wenn sie diese gut beherrschen, werden die restlichen Malsätzchen erarbeitet. Empfehlenswert kann auch hier sein, mit der Vorübung (S. 67) zu beginnen.

Beispiel: Die 2er-Reihe

a) Malreihe mit Eierschachteln aufbauen

Es werden entsprechend der Zehneranordnung fünf Zweier zu einem Zehnerblock gelegt. Bei *„6mal der Zweier“* wird dann darunter der zweite Zehnerblock gelegt.

Der Aufbau der 2er-Reihe soll verbal begleitet werden:

„Ein 2-er sind 2 und 2 sind ein 2er.“
„Zwei 2-er sind 4 und 4 sind zwei 2er.“
„Drei 2-er sind 6 und 6 sind drei 2er.“

Zugleich werden die In-Sätzchen vorbereitet:

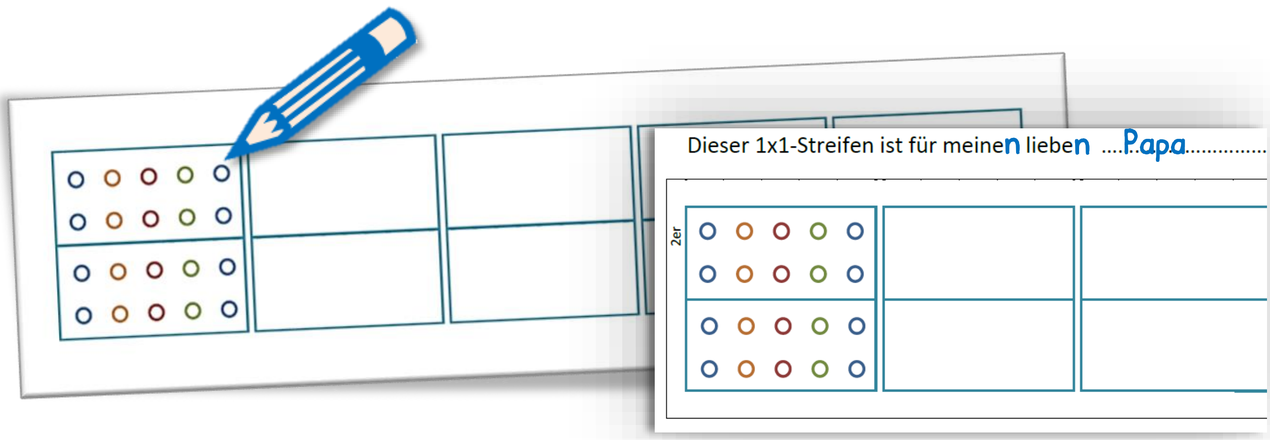
„Zehn 2-er sind 20 und 20 sind zehn 2er.“
„Neun 2-er sind 18 und 18 sind neun 2er.“
„Null 2-er sind 0 und 0 sind null 2er.“

Die so erarbeitete 2er-Reihe soll leicht zuglänglich im Unterrichtsraum ausgestellt werden, damit sie den Kindern bei Bedarf schnell zur Verfügung steht.

b) Vorbereitung des 1x1-Mengenbildstreifens

AB 10.3 ff

Der 1x1-Mengenbildstreifen für die aktuelle Malreihe wird durch den Streifen zum selber Ausmalen eingeführt. *Beim Ausmalen sollen die Malsätzlein gesprochen werden.* Die Vorlagen zum Ausdrucken finden sich zu jeder Malreihe in der Arbeitsmittelsammlung.

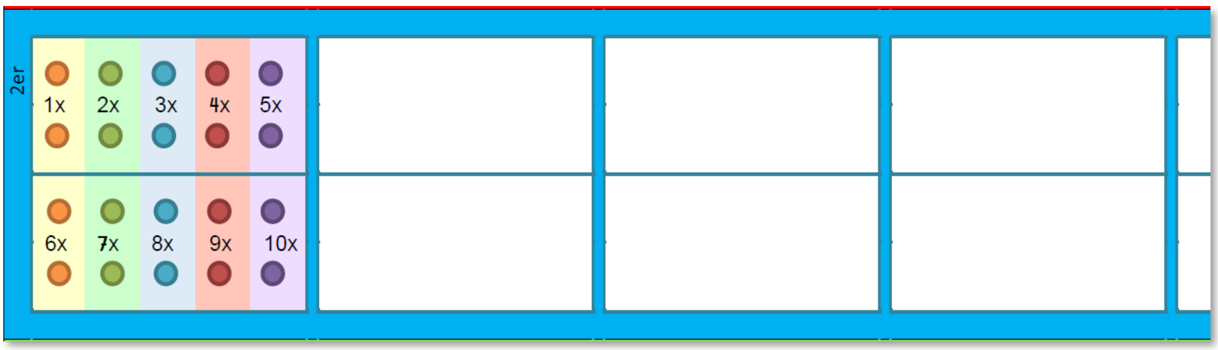


Diese Streifen können laut Vorlage in der Arbeitsmittelsammlung auch mit einer Widmung versehen sein und als Geschenk weitergegeben werden.

c) Einüben

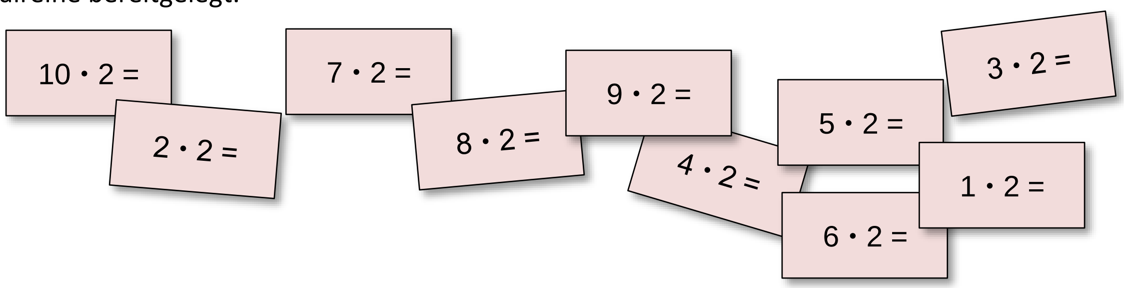
AB 10.2 ff

Um eine verinnerlichte Anschauung zu erlangen und um sich die Malreihen besser merken zu können und um den „Sachbezug“ nicht zu verlieren, wird nun beim Lösen schriftlich vorgegebener Malsätzchen mit dem 1x1-Mengenbildstreifen gearbeitet. Dazu können die beiden bereits bekannten Abdeckstreifen verwendet werden.

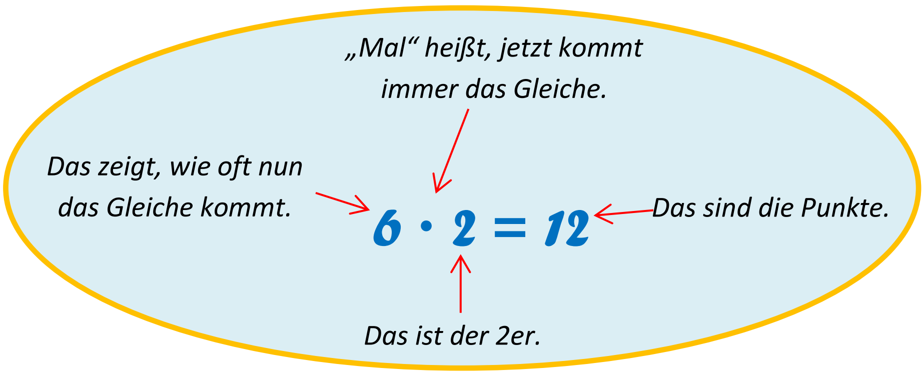


AB 10.5 ff

Für das Einüben des Malsätzchen werden noch die Rechenkärtchen mit den Malsätzchen der Zweiermalreihe bereitgelegt.



Das Kind liest das Malsätzlein, zeigt es auf dem 1x1-Mengenbildstreifen und schreibt die Rechnung in das Heft.
Hin und wieder soll das Kind dazu angehalten werden, das Geschriebene wie unten dargestellt verbal zu erklären.



Um die Übungsfrequenz zu erhöhen, wird das Aufschreiben der Malsätzchen nur noch zwischendurch kurz praktiziert und nur noch mit den Rechenkärtchen oder mit Arbeitsblättern geübt.

Allmählich wird das Kind in zunehmendem Maße einzelne Malsätzchen ohne 1x1-Mengenbildstreifen lösen können. Es wird dann die einfachen Malsätzchen aussortieren und sich auf die noch nicht verinnerlichten Malsätzchen konzentrieren, bis es auch diese ohne 1x1-Mengenbildstreifen lösen kann.

Entsprechend einer klugen und spezifisch auf das jeweilige Kind angewendeten Lernstrategie werden bereits gelernte Malreihen mittels der Lernkärtchen wiederholt und vertieft. Dabei soll immer wieder fallweise die Veranschaulichung und das geschriebene Malsätzchen erklärt werden, denn der Grundgedanke der Multiplikation soll vor lauter Automatismus nicht verloren gehen!

Variationen

Je nach Begabung sind die Kinder nun mit der Vorgangsweise bei der Erarbeitung der Malreihen vertraut, sodass die Vorübungen nicht mehr gemacht werden müssen. Für manche Kinder mag es genügen, wenn sie direkt mit dem 1x1-Mengenbildstreifen beginnen. Andere wiederum brauchen noch die konkrete Anschauung, wie es bei der Vorübung (S. 67) praktiziert wurde. Hilfreich für den Aufbau der Malreihe kann auch sein, den 1x1-Mengenbildstreifen zu zerschneiden um die Malreihe handelnd aufzubauen.

Dazu sind anschauliche Erläuterungen darüber, dass bei den Darstellungen der nun folgenden Malreihen die Mengenbilder manchmal zerlegt oder umgedreht werden müssen, nötig.

Unter Umständen muss eine eigene Kleingruppe für intensivere Betreuung gebildet werden.

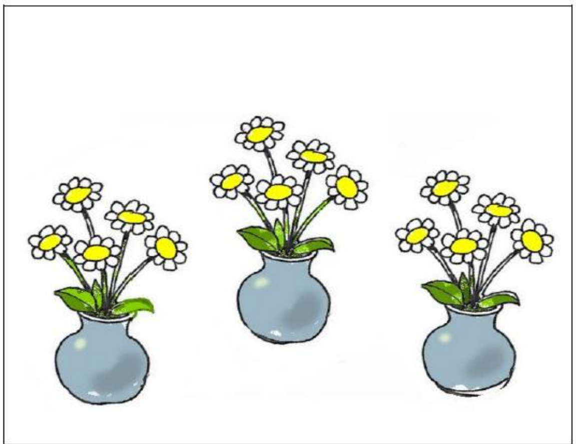
Ansonsten genügt es, nur folgende Arbeitsmittel zur Verfügung zu stellen:

- 1x1-Mengenbildstreifen (AB 10.2)
- 1x1-Mengenbildstreifen zum Ausmalen (AB 10.3)
- 1x1-Kärtchen mit dem Ergebnis auf der Rückseite (AB 10.4)

AB 10.6

Das Malnehmen gehört im Gegensatz zur Addition oder Subtraktion meist nicht zu den praktischen Lebenserfahrungen der Kinder. Deshalb müssen sie mit den Situationen, in denen das Malnehmen hilfreich ist, vertraut gemacht werden. Arbeitsblatt (AB) 10.6 soll als Beispiel dienen.

Anwendungsbeispiele für das Malnehmen



Wie viele Blumen? ☐ • ☐ = ☐

Wie viele Knöpfe? ☐ • ☐ = ☐

Für knobelfreudige Kinder:

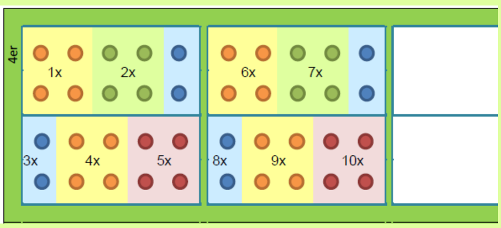
(Nicht als Lerntrick verwenden!!!)

Der 1x1-Mengenbildstreifen lässt Muster oder mathematische Zusammenhänge innerhalb der Malreihen erkennen. Auf ein vergleichsmäßig leicht erkennbares Muster wird hier hingewiesen.

Bei geradem Multiplikand (2er-, 4er-, 6er- oder 8er-Reihe) wiederholt sich das Muster nach der Hälfte der Malreihen. Z. B. bei der 2er-Reihe ab dem Produkt 10, bei der 4er-Reihe ab dem Produkt 20 usw. Dies kann man auch in folgendem Muster wiedergeben:

$1 \cdot 4 = 4 \rightarrow 6 \cdot 4 = 24$, oder

$3 \cdot 4 = 12 \rightarrow 8 \cdot 4 = 32$ usw.



Das Messen oder die In-Sätzchen

Messen und Teilen sind in der Verschriftlichung gleich. Jedoch liegen der „schriftlichen Division“ zwei ganz unterschiedliche Gedanken bzw. Absichten zugrunde. Genau das kann den Sachbezug bei Textaufgaben erschweren oder verunmöglichen. Daher wird empfohlen, zunächst nur den Gedanken an die Handlung des Messens (In-Sätzchen) anzuwenden und erst später die Idee des Teilens einzuführen.

Die In-Sätzchen können jeweils im Anschluss an die gerade gelernte Malreihe eingeführt werden. Der Gedanke des In-Sätzchens wurde schon gemeinsam mit dem Malnehmen eingeführt. Er muss nur noch verschriftlicht werden.

Der in den Schulbüchern gerne eingeschlagene Weg über die schriftliche Formulierung „10 in 30“ wird hier gemieden, weil bei der Verschriftlichung „30 : 10“ die Anordnung der Zahlen umgedreht werden muss. Das ist für viele Kinder verwirrend.

Verschriftlichung der In-Sätzchen

Wie man „drei mal zehn“ aufschreibt, ist bekannt, nämlich 3 • 10.

Wie schreibt man aber, dass in 30 drei 10er Platz haben?

Die Kinder machen Vorschläge.

So, wie es die Zeichen +, -, = und • gibt, haben die Mathematiker auch ein Zeichen dafür gefunden. Sie schreiben so:

30 : 10 = 3

Und dann wird diese Symbolsprache gemeinsam interpretiert:

30 : 10 = 3

„Da haben wir 30 (Punkte).“

„Da schreiben wir hin, dass drei 10er Platz haben.“

„Und da will man wissen, wie viele 10er in den 30 (Punkten) Platz haben.“

AB 10.7 ff
AB 10.8 f

Bei mündlichen Übungen oder Übungen auf dem AB können nach Bedarf die 1x1-Mengenbildstreifen beigezogen werden.

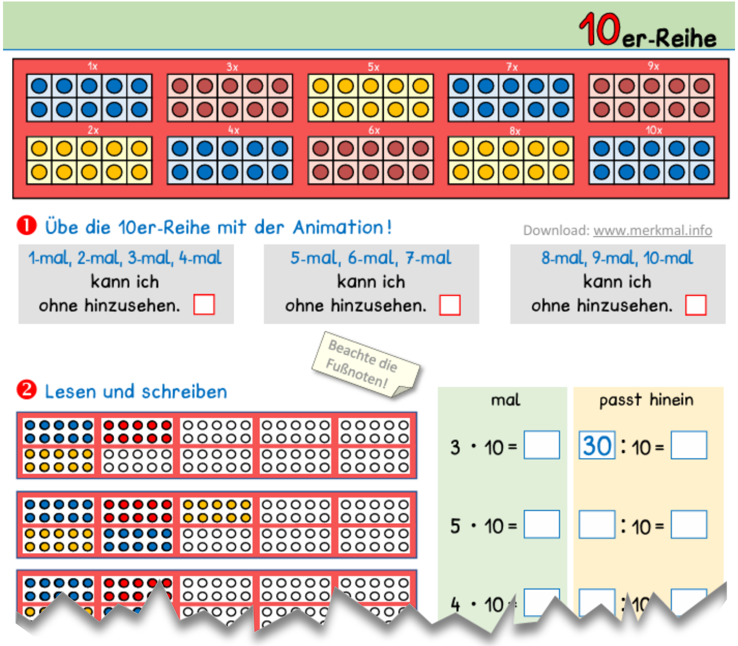
Das Messen kann auf zwei verschiedene Wege gedacht werden:

Beispiel: 30 : 10 = 3

1. Wie viele 10er haben in 30 Platz?
2. Wie viele 10er kann ich aus 30 machen?

Beide Blicke auf die Rechenoperation des Messens sollen dem Kind nahegebracht werden.

In unserem Schulbuch Mathemäuslein 4 erfolgt das Lernen der Malsätzchen und der Insätzchen gleichzeitig. Mit Blick auf die bildliche Darstellung der Malreihe, z.B. auf die 4er-Malsätzchen, spricht das Kind: „3-mal ein Zehner ergibt 30.“ und „In 30 passt ein Zehner 3-mal hinein.“



Auszug aus dem Schulbuch Mathemäuslein 4, 10er-Reihe, Seite 64.

Anmerkung zum Messen und Teilen:

Der Vereinheitlichung der beiden Rechenoperationen durch die Sprechweise z.B. 8 „durch“ 2 ist dringend entgegenzuwirken. Sie erschwert das Verständnis der Zusammenhänge zwischen mathematischen Sachverhalten und Rechenoperationen lebensbegleitend!
Das Wort „durch“ führt bei den Rechenoperationen nur zum Gedanken des Teilens. Es besteht die Gefahr, dass der Gedanke des Messens somit nicht ausreichend präsent ist, was später, z. B. beim Prozentrechnen, Probleme verursachen kann.
Es wird daher empfohlen, die Gedankengänge, das sind die Vorstellungen der Handlungen und der bildlichen Repräsentationen, die den Rechenoperationen Messen und Teilen zu Grunde liegen, bewusst zu üben und immer wieder aufzufrischen.

5 Anhang

Zum System der Mathemäuslein-Mengendarstellung

Die Vorstellungsbilder sind auch auf größere Zahlenräume (ZR) erweiterbar. Einheiten größerer Zahlenräume (Zehnerpotenzen) werden immer gleich angeordnet, wie die Einer-Mengenbilder im Zahlenraum 10. Die erlernten Mengenbilder sind dadurch auch in den ZR 100, 1000 usw. anwendbar

Ebenso sind die Rechenoperationen auf größere ZR übertragbar.

Das dezimale Stellenwertsystem wird eng mit der Mengendarstellung verknüpft bzw. ist ohne lange Erklärungen von Natur aus in der Darstellung immanent.